

Autoreferat

*Badajcie, co jest miłe Panu.
(Ef 5,10)*

1 Imię i nazwisko:

Grzegorz Oleksik

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

- **Stopień naukowy doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki** uzyskany 10.11.2010 roku na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego.

Tytuł pracy doktorskiej: *Wykładownik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanych*

Promotor: *prof. dr hab. Tadeusz Krasiński*

- **Dyplom magistra matematyki** uzyskany w 2002 roku na kierunku matematyka, specjalność *matematyka teoretyczna* na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego.

Tytuł pracy magisterskiej: *Twierdzenie Dvoretzky'ego*

Promotor: *prof. dr hab. Wojciech Banaszczyk*

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- **Adiunkt** w Instytucie Matematyki Politechniki Poznańskiej od 01.10.2022 do obecnie
- **Adiunkt** w grupie pracowników badawczo-dydaktycznych w Katedrze Geometrii Algebraicznej i Informatyki Teoretycznej Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego od 2010 do 2023 r.
- **Asystent** w Katedrze Analizy Matematycznej i Teorii Sterowania Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego w latach 2002 – 2006

4 Omówienie osiągnięć naukowych

Osiągnięciami naukowymi, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r., stanowiącymi podstawę do ubiegania się o stopień doktora habilitowanego w dyscyplinie matematyka w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych jest powiązany tematycznie cykl publikacji zatytułowany:

METODY KOMBINATORYCZNE W TEORII OSOBLIWOŚCI ZESPOLONYCH

Cykl publikacji

- [BKO21] Brzostowski, S., Krasieński, T., Oleksik, G.: *The Łojasiewicz exponent in non-degenerate deformations of surface singularities*. Ann. Polon. Math. 127: 165 – 175, (2021)
- [BKO23] Brzostowski, S., Krasieński, T., Oleksik, G.: *The Łojasiewicz exponent of nondegenerate surface singularities*. Canad. Math. Bull. 66: 1391 – 1410, (2023)
- [BO16] Brzostowski, S., Oleksik, G.: *On combinatorial criteria for non-degenerate singularities*. Kodai Math. J. 39: 455 – 468, (2016)
- [EOR21] Eyral, Ch., Oleksik, G., Różycki, A.: *Lê numbers and Newton diagram*. Adv. Math. 376: 1 – 21, 107441, (2021)
- [Ole20] Oleksik, G.: *On a generic dimension of the critical locus*. Results Math. 75: 1 – 9, (2020)
- [Ole22] Oleksik, G.: *The Łojasiewicz exponent of weighted homogeneous polynomials at infinity*. Kyoto J. Math. 62: 403 – 415, (2022)

Prace [BKO23, BKO21, BO16] dotyczą niezmienników osobliwości izolowanych. Prace [Ole20, EOR21] dotyczą osobliwości nieizolowanych. W ostatniej pracy [Ole22] badamy zachowanie wielomianów wagowojednorodnych w nieskończoności.

4.1 Wstęp

Osobliwości krzywych i ogólniej hiperpowierzchni są od dawna obiektem badań w geometrii algebraicznej i analitycznej. Teoria osobliwości krzywych jest klasyczna i najlepiej zbadana. Przypadek osobliwości hiperpowierzchni jest bardziej złożony. Osobliwości te mogą różnić się między sobą wieloma cechami. Zatem warto poznawać i wyznaczać pewne liczbowe wartości, zwane niezmiennikami, które je charakteryzują. Nasze badania koncentrują się na wyznaczaniu dyskretnych niezmienników osobliwości analitycznych zespolonych. W tym celu okazuje się pożyteczne stowarzyszenie z osobliwością pewnego kombinatorycznego wypukłego obiektu w przestrzeni rzeczywistej, zwanego wielościanem Newtona. Około 50 lat temu Władimir I. Arnold postawił 3 następujące problemy związane z wielościanem Newtona osobliwości (zobacz [Arn04]) :

1968-2 Które topologiczne niezmienniki wielomianu nad $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$) są możliwe do odczytania z jego diagramu Newtona (i ze znaków jego współczynników) ?

1975-1 Każdy interesujący dyskretny niezmiennik generycznej osobliwości o zadanym wielościanu Newtona jest interesującą funkcją tego wielościanu. Zbadaj sygnaturę, liczbę moduli, indeks osobliwości, monodromię, wariację, wielomian Bernsteina oraz μ_i (dla generycznych cięć)

1975-21 Wyraż główne liczbowe niezmienniki typowej osobliwości o zadanym diagramie Newtona (np. sygnaturę, genus 1-wymiarowego włókna Milnora) w terminach tego diagramu.

Do tej pory z wielościanu Newtona generycznej osobliwości (tzn. osobliwości o generycznych współczynnikach) odczytano wiele jej niezmienników. Najważniejszym z nich jest liczba Milnora [Kou76]. Nasze rezultaty potwierdzają powyższe hipotezy Arnolda dla takich niezmienników osobliwości zespolonych jak wykładnik Łojasiewicza, liczby Lê i wymiar zbioru punktów krytycznych. W celu bardziej przejrzystego układu autoreferatu najpierw przedstawimy potrzebne pojęcia w preliminariach a następnie podzielimy uzyskane wyniki na kilka podtematów.

4.2 Preliminaria

Oznaczmy $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

4.2.1 Wielościan Newtona

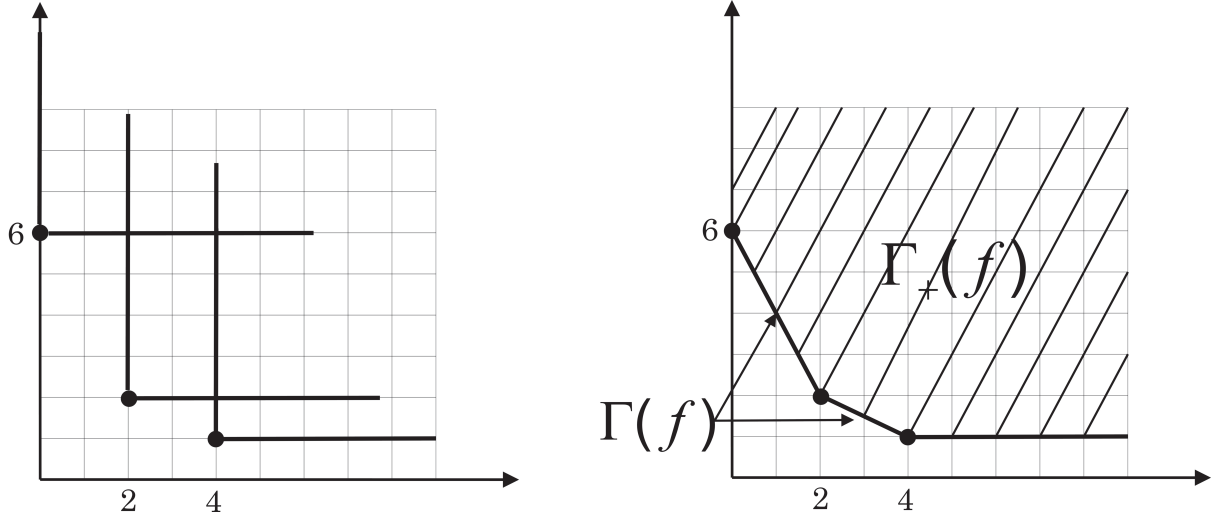
Niech $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie *osobliwością*, a więc kielkiem funkcji holomorficznej określonej w pewnym otoczeniu zera posiadającej punkt krytyczny w $0 \in \mathbb{C}^n$. Podamy teraz definicje wielościanu Newtona osobliwości f i pojęć z nim związanych (zobacz [Kou76]):

- $f(z) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} z^{\alpha}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $c_{\alpha} \in \mathbb{C}$, $z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$.
- $\Gamma_+(f) \subset \mathbb{R}_+^n$ – otoczka wypukła $\bigcup_{c_{\alpha} \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}_+^n)$ – *wielościan Newtona* f .
- $\Gamma(f)$ – rodzina zwartych ścian $\Gamma_+(f)$ – *diagram Newtona* f .
- $q = (q_1, \dots, q_n)$, $q \perp S \in \Gamma(f)$, $q \in \mathbb{N}^n$, $\text{nwd}(q_1, \dots, q_n) = 1$ – *wektor prymitywny ściany* S .
- f – *dogodna*, jeśli $\Gamma_+(f) \cap OX_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$.
- $f_{\Delta}(z) := \sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha} z^{\alpha}$, $\Delta \in \Gamma(f)$.
- f – *niezdegenerowana w sensie Kuznirenki* na Δ , gdy układ równań

$$\frac{\partial f_{\Delta}}{\partial z_1}(z) = \cdots = \frac{\partial f_{\Delta}}{\partial z_n}(z) = 0$$

nie ma rozwiązań w $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

- f – niezdegenerowana w sensie Kuznirenki (krótko: niezdegenerowana), gdy f niezdegenerowana na każdej ścianie $\Delta \in \Gamma(f)$.



Rysunek 1: Wielościan Newtona i diagram Newtona kielka $f(x, y) = y^6 + x^2y^2 + x^4y$.

Z diagramem Newtona osobliwości f stowarzyszymy pewną nieujemną liczbę całkowitą otrzymaną w następujący sposób:

- Dla $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ określamy

$$X^I := \{(x_1, \dots, x_n) \in X : x_i = 0 \text{ if } i \notin I\}.$$

- $X^{\{i\}}$ – przecięcie osi Ox_i z X .
- $\Gamma_-(f)$ – stożek rozpięty przez $\Gamma(f)$ o wierzchołku w $0 \in \mathbb{R}^n$.

Jeśli f jest dogodna, to liczbę Newtona osobliwości f definiujemy następująco:

$$\nu(f) := \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-|I|} |I|! \text{Vol}_{|I|}(\Gamma_-(f)^I),$$

gdzie $\text{Vol}_{|I|}(\Gamma_-(f)^I)$ to objętość $|I|$ wymiarowa $\Gamma_-(f)^I$. Dla $I = \emptyset$ podzbiór $\Gamma_-(f)^\emptyset$ redukuje się do $\{0\}$, i wtedy przyjmujemy $\text{Vol}_0(\Gamma_-(f)^\emptyset) = 1$. Jeśli f jest niedogodna, to jej liczbę Newtona f określamy jako:

$$\nu(f) := \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \nu\left(f + \sum_{i \in J} z_i^m\right),$$

przy czym $i \in J$ dokładnie wtedy, gdy $\Gamma_+(f) \cap OX_i = \emptyset$.

4.2.2 Wielomiany wagowojednorodne

Wprowadzimy teraz pojęcie wagowojednorodnych wielomianów i wagowojednorodnych odwzorowań wielomianowych.

Definicja 4.1 Niech $(w_1, \dots, w_n)$ będzie ciągiem niezerowych liczb wymiernych. Powiemy, że wielomian $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ jest *wagowojednorodny typu $(w_1, \dots, w_n)$* , jeśli jest sumą niezerowych jednomianów postaci $c_\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, takich, że

$$\frac{\alpha_1}{w_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{w_n} = 1.$$

Ponadto, gdy $w_1 = \dots = w_n$, to f nazywamy *wielomianem jednorodnym*.

Uwaga 4.2 Liczby w_i w powyższej definicji nazywane są wagami. Ich istnienie jest równoważne istnieniu niezerowych liczb całkowitych $q_1, \dots, q_n, d$ takich, że $\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n = d$ i wtedy powiemy równoważnie, że f jest wagowojednorodny typu $(q_1, \dots, q_n; d)$. Wówczas $w_i = d/q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Wagi wagowojednorodnych wielomianów nie są jednoznacznie wyznaczone. Na przykład wielomian $f = xy$ jest wagowojednorodny typu $(2, 2)$ oraz typu $(3/2, 3)$. W przypadku, gdy wielomian wagowojednorodny f o wagach $w_i \geq 2$, definiuje osobliwość izolowaną, to jego wagi są wyznaczone jednoznacznie (zobacz [Sai71, Korollar 1.7], [BK16, Proposition 1]). Przy tym ograniczeniu na wagi wielomian $f = xy$ jest wagowojednorodny tylko typu $(2, 2)$. Stąd w naszych badaniach wielomiany wagowojednorodne o wagach $w_i \geq 2$ będą odgrywać szczególną rolę. Łatwo sprawdzić, że jeśli $\text{ord } f = 1$, to $w_i = 1$ dla pewnego i . Również, jeśli $\text{ord } f \geq 2$ i f zależy od zmiennej z_i , to $w_i > 1$ w przypadku, gdy wagi są dodatnie.

Definicja 4.3 Odwzorowanie wielomianowe $F = (F_1, \dots, F_n)$ nazywamy *wagowojednorodnym* (odpowiednio *jednorodnym*) typu $(w_1, \dots, w_n)$ jeśli wszystkie F_i są wagowojednorodnymi (odpowiednio jednorodnymi) wielomianami tego samego typu $(w_1, \dots, w_n)$.

Niech $q_1, \dots, q_n$ będą niezerowymi liczbami całkowitymi oraz niech $f = \sum_k a_k z^k$ będzie wielomianem zmiennych $z_1, \dots, z_n$, $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$. Maksimum iloczynów skalarnych $\langle q, k \rangle$ takich, że $a_k \neq 0$, będziemy nazywać *stopniem f względem q* i oznaczać przez $\deg_q f$. Przez f_q^+ będziemy oznaczać sumę wyrazów $a_k z^k$ takich, że $\langle q, k \rangle = \deg_q f$. Jeśli $q_1 = \dots = q_n$, to zamiast f_q^+ będziemy pisać krótko f^+ . Dla odwzorowania wielomianowego $F = (F_1, \dots, F_m)$ określamy odwzorowanie wielomianowe $F_q^+ = (F_{1,q}^+, \dots, F_{m,q}^+)$.

Definicja 4.4 Odwzorowanie wielomianowe $F = (F_1, \dots, F_n)$ nazywamy *pre-wagowojednorodnym względem q* jeśli $(F_q^+)^{-1}(0) = \{0\}$.

Definicja 4.5 Wielomian $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ nazywamy *pre-wagowojednorodnym względem q* jeśli $((\nabla f)_q^+)^{-1}(0) = \{0\}$.

4.2.3 Nierówność Łojasiewicza

W 1950 roku francuski matematyk Laurent Schwartz postawił słynny problem dzielenia dystrybucji przez funkcje analityczne.

Problem Niech T będzie dystrybucją określoną na zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz ϕ funkcją klasy $\mathbb{C}^\infty$ określoną na Ω . Problem dzielenia dystrybucji polega na znalezieniu dystrybucji S określonej na Ω takiej, że

$$T = \phi S.$$

(zob. [Sch51, Tom II, Rozdz. 5, str. 121-126, Rozdz. 7, str. 154])

W 1958 roku Lars Hörmander rozwiązał ten problem, w przypadku, gdy ϕ jest niezerowym wielomianem [Hör58]. Problem w pełnej ogólności, czyli gdy ϕ jest niezerową funkcją analityczną został rozwiązany w 1959 roku przez Stanisława Łojasiewicza [Łoj59]. Kluczową rolę w jego rozwiązaniu odegrała nierówność Łojasiewicza dla funkcji analitycznych:

Twierdzenie ([Łoj59]) Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$ i $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją analityczną rzeczywistą. Niech $Z = \{x \in G : f(x) = 0\}$. Wtedy dla każdego zbioru zwartego $K \subset G$ istnieją stałe $C > 0$ i $\alpha \geq 0$, takie, że

$$\text{dist}(x, Z) \leq C|f(x)|^\alpha$$

dla każdego $x \in K$.

W wyniku analizy tej nierówności powstała geometria semianalityczna i subanalityczna. Istnieją różne typy nierówności Łojasiewicza. Najlepszy możliwy wykładnik występujący w tych nierównościach jest nazywany wykładnikiem Łojasiewicza. Jest on ważnym niezmiennikiem w teorii osobliwości. Znajduje on także zastosowanie w teorii równań różniczkowych i optymalizacji. Prowadzone są badania zarówno w przypadku rzeczywistym jak i zespolonym, lokalnym jak i w nieskończoności tzn. poza pewnym zbiorem zwartym.

W naszych badaniach zajmujemy się głównie przypadkiem lokalnym zespolonym, dotyczącym gradientu funkcji holomorficznej.

Niech $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną tzn. kiełkiem funkcji holomorficznej posiadającej izolowany punkt krytyczny w $0 \in \mathbb{C}^n$. Najmniejszą liczbę rzeczywistą dodatnią α taką, że:

$$|\text{grad } f(z)| \geq C|z|^\alpha,$$

w pewnym otoczeniu zera i dla pewnej stałej $C > 0$, nazywamy *wykładnikiem Łojasiewicza* f w 0 i oznaczamy przez $\mathcal{L}_0(f)$. Wykładnik Łojasiewicza jest liczbą wymierną, co wynika z następującej równoważnej definicji wykładnika Łojasiewicza [L-JT74, Pł88].

$$\mathcal{L}_0(f) = \sup \left\{ \frac{\text{ord}(\text{grad } f \circ \varphi)}{\text{ord } \varphi} : \varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}^n, \varphi(0) = 0, \varphi \neq 0 \right\} \quad (1)$$

Właśnie powyższa wersja definicji stanie się użyteczna w naszych rozważaniach. Wykładnik Łojasiewicza jest niezmiennikiem biholomorficznym a także topologicznym w przypadku krzywych ($n = 2$). Pytanie czy jest niezmiennikiem topologicznym w ogólnym przypadku wciąż pozostaje otwarte. Jedną z najważniejszych cech wykładnika Łojasiewicza jest jego związek ze stopniem C^0 -dostateczności [ChL73]:

$$\text{suff}_0(f) = [\mathcal{L}_0(f)] + 1, \quad (2)$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x . Intuicyjnie stopień C^0 -dostateczności określa, jak daleko należy „uciąć” rozwinięcie f w szereg potęgowy, tak aby odrzucona reszta już nie wpływała na topologię osobliwości f .

Badania nad wykładnikiem Łojasiewicza osobliwości izolowanych w ogólnym przypadku prowadzili m.in. Lejeune - Jalabert i Tessier [L-JT74, Tes77], Płoski [Pł84, Pł85a, Pł88], Rodak i Spodzieja [RRS16, RS11a, Spo00]. Problem dokładnego wyznaczenia wykładnika Łojasiewicza konkretnej osobliwości izolowanej nie jest trywialny. W przypadku krzywych znane są dokładne wzory podane w różnych terminach przez Krasieńskiego i Chądzynskiego [ChK88a, ChK95] oraz Płoskiego [Pł01].

Istnieją zespolone odmiany nierówności Łojasiewicza w otoczeniu nieskończoności (tzn. poza pewnym zbiorem zwartym). Niech $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym o skończonym zbiorze zer. Największą liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ taką, że:

$$|F(z)| \geq C|z|^\alpha,$$

w pewnym otoczeniu nieskończoności, dla pewnego $C > 0$, nazywamy *wykładnikiem Łojasiewicza F w nieskończoności* i oznaczamy przez $l_\infty(F)$. Podobnie jak w przypadku lokalnym jest to liczba wymierna. Znajduje on zastosowanie w wielu problemach dotyczących odwzorowań wielomianowych, na przykład znane są jego istotne związki z Hipotezą Jakobianową [ChK92a, Kra07].

Niech $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie wielomianem o skończonej liczbie punktów krytycznych. Definiujemy liczbę

$$\mathcal{L}_\infty(f) = l_\infty(\text{grad } f)$$

i nazywamy ją *wykładnikiem Łojasiewicza wielomianu f w nieskończoności*. Tak określony wykładnik znajduje zastosowanie w teorii punktów bifurkacyjnych wielomianu w nieskończoności [ChK03, Kra07]. Wyznaczenie wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności nie jest łatwym problemem, zajmowali się nim Chądzynski i Krasieński [ChK88b, ChK92a, ChK92b, ChK97b, ChK03, CKT99, Kra07], Cygan i Tworzewski [CKT99], Gwoździewicz i Płoski ([GP05, Pł85b], Ha [Ha90], Jelonek [Jel06], Lenarcik [Len99] oraz Rodak i Spodzieja [RS09].

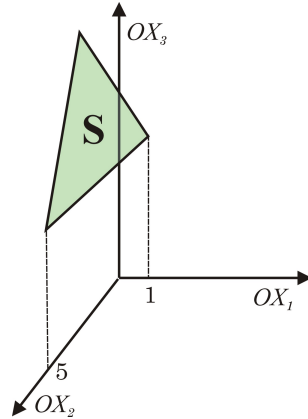
Inne zespolone odmiany nierówności Łojasiewicza były badane m.in. przez Chądzynskiego i Krasieńskiego [ChK97a], Denkowskiego [Den05, Den07, Den18a, Den18b], Gwoździewicz i Spodzieję [GS05] oraz Ji, Kollára, Shiffmana [JKS92, Kol88] i Tworzewskiego [Two93].

Nierówność Łojasiewicza była i jest wciąż intensywnie badana także w przypadku rzeczywistym, m.in. zajmowali się nim D’Accunto [AK05], Bochnak [BoK79, BŁ71, BR75], Bui [BP14], Cassou-Noguès [C-NH96], Dinh [DHT12, DHPT14], Duc [DH10], Le Gal [GKT13], Gwoździewicz [Gwo98, Gwo99], Ha [C-NH96, DH10, DHT12, DHPT14], Kollár [Kol99], Kucharz [BoK79], Kuo [Kuo74], Kurdyka [AK05, GKT13, KS14], Łojasiewicz [BŁ71], Pham [BP14, DHPT14, Pha11, Pha12], Risler [BR75], Rodak [RS11b], Spodzieja [KS14, RS11b, Spo05], Thao [DHT12, DHPT14], Tiep [GKT13].

4.3 Wykładnik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanych (prace [BKO21, BKO23])

Okazuje się, że diagram Newtona osobliwości izolowanej i niezdegenerowanej w sensie Kuznirenki determinuje jej wykładnik Łojasiewicza ([Brz19, DG83, Yos89], [Oka97, Theorem 5.3]). Jednak znalezienie dokładnego wzoru na ten wykładnik w terminach jej diagramu Newtona nie jest prostym problemem. W przypadku n -wymiarowym istnieją tylko oszacowania wykładnika Łojasiewicza [Abd05, B-A03, B-A09, Fuk91, Oka18, Ole09b]. W przypadku krzywych ($n = 2$), Andrzej Lenarcik w 1996 roku podał wzór na wykładnik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanej [Len98]. Użył w tym celu tzw. *odcinków wyjątkowych diagramu Newtona* (w dwuwymiarowym układzie współrzędnych jeden wierzchołek takiego odcinka leży np. na osi OX , a drugi jest od tej osi o 1 oddalony), po ich usunięciu z brzegu Newtona osobliwości pozostała część brzegu jednoznacznie wyznacza wykładnik. Pomysł użycia takich krańcowych odcinków pochodzi od Wojciecha Kucharza [Kuch91]. W pracy [BKO23] przenosimy wynik Lenarcika na przypadek trójwymiarowy ($n = 3$). Kluczową sprawą jest przeniesienie pojęcia odcinka wyjątkowego, czyli odpowiednio zdefiniowanie dwuwymiarowej ściany wyjątkowej.

Definicja 4.6 Ścianę $S \in \Gamma^2(f)$ nazywamy *ścianą wyjątkową f względem osi OX_i* , $i \in \{1, 2, 3\}$, jeżeli jeden z jej wierzchołków jest oddalony o 1 od osi OX_i a pozostałe wierzchołki tworzą 1-wymiarowy odcinek leżący w płaszczyźnie układu współrzędnych zawierającej oś OX_i i nie zawierającej tego wierzchołka (Rys. 2). Ścianę $S \in \Gamma^2(f)$ nazywamy *ścianą wyjątkową f* , jeśli jest ona wyjątkowa względem jednej z osi układu współrzędnych. Przez E_f będziemy oznaczać zbiór ścian wyjątkowych.



Rysunek 2: Ściana wyjątkowa S względem osi OX_3 .

Uwaga 4.7 W języku algebraicznym powyższa definicja jest równoważna następującej:

Ścianę $S \in \Gamma^2(f) \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy *ścianą wyjątkową f względem osi OX_i* , jeśli istnieją $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ takie, że $(f_S)'_{z_j} = az_i^k$.

Podamy teraz główny wynik pracy [BKO23].

Twierdzenie 4.8 *Niech $f : (\mathbb{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną. Jeśli $\Gamma^2(f) \setminus E_f \neq \emptyset$, to*

$$\mathcal{L}_0(f) = \max_{S \in \Gamma^2(f) \setminus E_f} m(S) - 1, \quad (3)$$

gdzie $m(S)$ oznacza maksimum współrzędnych przecięcia hiperpłaszczyzny podpierającej ściany S z osiami układu współrzędnych.

Nierówność w jedną stronę " $\leq$ " we wzorze (3) została udowodniona w [Ole10, Ole13b]. Przypadek, gdy $\Gamma^2(f) \setminus E_f = \emptyset$ jest wyjątkowy i został dokładnie zbadany również w [Ole10, Ole13b]. Zatem w pracy [BKO23] skupiamy się na dowodzie nierówności w drugą stronę " $\geq$ ". W tym celu znajdujemy parametryzację realizującą kres górny w definicji (1), która jest jednocześnie w odpowiedni sposób stowarzyszona z $S \in \Gamma^2(f) \setminus E_f$, przecinającą „najdalej” osie układu współrzędnych [BKO23, Theorem 4.1, 4.5]. Stowarzyszenie to możemy określić następująco: jeśli wektor $[a, b, c]$ jest wektorem prymitywnym ściany S , to każda parametryzacja typu:

$$(\alpha t^{ka} + \dots, \beta t^{kb} + \dots, \gamma t^{kc} + \dots), \alpha\beta\gamma \neq 0, k = 1, 2, \dots,$$

jest stowarzyszona ze ścianą S . Okazuje się, że nie zawsze jest możliwe znalezienie parametryzacji stowarzyszonej z „całą” ścianą S , ale wtedy udaje się znaleźć parametryzację związaną z jej krawędzią lub tylko jej wierzchołkiem [BKO23, Theorem 6.1]. Głównymi narzędziami w dowodzie są:

- twierdzenie mówiące o tym, że wykładnik Łojasiewicza osobliwości izolowanej i niezdegenerowanej zależy jedynie od jej diagramu Newtona [Brz19],
- klasyczne twierdzenie Bernsteina [Ber75] o liczbie izolowanych rozwiązań układu równań wielomianowych w przypadku niezdegenerowanym,
- rezultat Maurera [Mau80] pozwalający znaleźć parametryzację krzywej (będącej zbiorem zer ideału o pewnych własnościach) taką, że wektor utworzony z rzędów współrzędnych parametryzacji ma ustalony kierunek. Wynik Maurera stanowi wielowymiarowy odpowiednik klasycznego Twierdzenia Newtona - Puisseux dla krzywych (zob.np. [JP00, Chapter 5.1]).

Bezpośrednio z twierdzenia 4.8 oraz z z formuły (2) dostajemy ważny wniosek.

Wniosek 4.9 *Niech $f : (\mathbb{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną w sensie Kuznirenki. Jeśli $\Gamma^2(f) \setminus E_f \neq \emptyset$, to*

$$\text{suff}_0(f) = \left\lceil \max_{S \in \Gamma^2(f) \setminus E_f} m(S) \right\rceil.$$

Przejdziemy teraz do omówienia wyników pracy [BKO21], w której badamy zachowanie się wykładnika Łojasiewicza w rodzinach osobliwości. Najpierw podamy niezbędne pojęcia. Deformacją kielka holomorficznego $f_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ nazywamy kielkę holomorficzną $f : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ taki, że

- $f(0, z) = f_0(z)$
- $f(t, 0) = 0$,

Deformację f będziemy traktować jako rodzinę kielków (f_t) w $0 \in \mathbb{C}^n$, przyjmując $f_t(z) := f(t, z)$. Jeśli f_0 jest osobliwością izolowaną, to dla dostatecznie małych t również f_t jest osobliwością izolowaną oraz liczba Milnora (def. w sekcji 4.5) jest półciągła z góry w tej rodzinie [GLS07, Ch. I, Thm. 2.6]:

$$\mu_f(0) \geq \mu_{f_t}(0).$$

W przeciwieństwie do liczby Minora wykładnik Łojasiewicza nie ma żadnej własności półciągłości w dowolnych rodzinach osobliwości [BKO21, Example 1]. Jednak w rodzinach o stałej liczbie Milnora B. Tessier udowodnił półciągłość z dołu wykładnika Łojasiewicza i postawił hipotezę, że wykładnik Łojasiewicza jest stały w takich rodzinach [Tes77, Pło10]. Główny wynik pracy [BKO21] potwierdza jego hipotezę w klasie osobliwości niezdegenerowanych 3-zmiennych.

Twierdzenie 4.10 *Niech $f_0 : (\mathbb{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną i (f_t) będzie jej niezdegenerowaną deformacją. Jeśli (f_t) jest μ -const deformacją, to*

$$\mathcal{L}_0(f_0) = \mathcal{L}_0(f_t) \tag{4}$$

dla dostatecznie małych t

Uwaga 4.11 Rodzina (f_t) jest niezdegenerowana, jeśli wszystkie f_t są niezdegenerowane dla małych t .

Ponieważ liczba Milnora jest niezmiennikiem topologicznym [Mil68], to jako ważny wniosek dostajemy, że wykładnik jest w tym przypadku również niezmiennikiem topologicznym.

Wniosek 4.12 *Niech $f_0 : (\mathbb{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i niezdegenerowaną i (f_t) będzie jej niezdegenerowaną deformacją. Jeśli kielki funkcji holomorficznych f_t są parami topologicznie równoważne, to*

$$\mathcal{L}_0(f_0) = \mathcal{L}_0(f_t) \tag{5}$$

dla dostatecznie małych t .

W dowodzie twierdzenia 4.10 skorzystaliśmy kolejno z formuły Kusznirenki [Kou76], z charakteryzacji stałości liczby Newtona [BKW19] oraz wzoru (3) na wykładnik Łojasiewicza. Idea dowodu polega na tym, że przy równości liczb Newtona f i f_t diagramy f , f_t różnią się o ściany wyjątkowe, które nie mają wpływu na wartość wykładnika Łojasiewicza.

Jeśli chodzi o wkład poszczególnych autorów w omówione w tej sekcji prace, to na początku chciałbym zaznaczyć, że autorzy odbyli wspólnie wiele konsultacji w dłuższym okresie czasu i wkład każdego z nich był istotny. Stąd trudne jest szczegółowe wydzielanie udziałów. Jeśli miałbym jednak zaznaczyć kilka moich akcentów, to są one następujące: Praca [BKO23]:

- Definicja ściany wyjątkowej (Def. 3).
- Dowód nierówności " $\leq$ " w twierdzeniu 4.8.
- Istotny udział w wykazaniu degeneracji funkcji F w dowodzie lematu 4.2
- Sformułowanie twierdzenia [BKO23, Theorem 6.1] i jego dowód w części II (Part II), co istotnie się przyczyniło do skrócenia i uproszczenia dowodu głównego twierdzenia 4.8.

Praca [BKO21]:

- Pomysł użycia twierdzenia 4.8 w dowodzie głównego twierdzenia 4.10
- Istotny udział w dowodzie głównego twierdzenia 4.10

4.4 Wymiar zbioru punktów krytycznych (prace [BO16, Ole20])

W pracach [BO16, Ole20] zajmujemy się odczytywaniem wymiaru kielka zbioru punktów krytycznych Σf osobliwości f z jej diagramu Newtona. W pracy [BO16] badamy przypadek, gdy $\dim_0 \Sigma f = 0$, czyli gdy f jest osobliwością izolowaną, zaś w pracy [Ole20] badamy osobliwości nieizolowane.

Zacniemy od zdefiniowania warunku Kusznirenki, który jest kluczowy w tym podrozdziale. Niech $M \subset \mathbb{N}_0^n$. Zdefiniujemy zbiory $M_i = \{\nu \in \mathbb{N}_0^n : \nu + e_i \in M\}$, gdzie $e_1, \dots, e_n$, jest standardową bazą w $\mathbb{R}^n$. Zauważmy, że jeśli określimy $\lambda_M(z) = \sum_{m \in M} z^m$, wtedy $M_i = \text{supp } \partial \lambda_M / \partial z_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$. Niech $I \subset \{1, \dots, n\}$ będzie niepusty. Zdefiniujemy hiperpłaszczyznę:

$$OX_I = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ for } i \notin I\}.$$

Widzimy zatem, że OX_I jest hiperpłaszczyzną rozpiętą na osiach $OX_i, i \in I$. Niech $d \geq 0$ będzie liczbą całkowitą.

Definicja 4.13 Powiemy, że M spełnia *d-warunek Kusznirenki dla I* , jeśli istnieje co najmniej $|I| - d$ niepustych zbiorów wśród zbiorów $M_1 \cap OX_I, M_2 \cap OX_I, \dots, M_n \cap OX_I$. Powiemy, że M spełnia *d-warunek Kusznirenki*, jeśli M spełnia *d-warunek Kusznirenki dla każdego $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$* .

Bezpośrednio z powyższej definicji wynika, że 0-warunek Kusznirenki jest równoważny warunkowi Kusznirenki zdefiniowanemu w pracy [BO16, Preliminaries]. Stąd dla prostoty zapisu zamiast 0-warunek Kusznirenki będziemy pisać warunek Kusznirenki.

Znana jest następująca własność (zob. np. [Sai71, Lemma 1.5], [Shc79, Remark 3]).

Stwierdzenie 4.14 *Jeśli f jest osobliwością izolowaną, to jej nośnik spełnia warunek Kusznirenki.*

Uwaga 4.15 Prawdopodobnie Saito [Sai71, Lemma 1.5] jako pierwszy odkrył powyższą własność. Przy czym w tezie zamiast warunku Kusznirenki użył innego warunku kombinatorycznemu równoważnego.

Główny wynik pracy [BO16] mówi, że w klasie osobliwości niezdegenerowanych zachodzi twierdzenie odwrotne do stwierdzenia 4.14.

Twierdzenie 4.16 *Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, będzie niezdegenerowaną osobliwością. Jeśli jej nośnik spełnia warunek Kuznirenki, to f jest osobliwością izolowaną.*

Z powyższego twierdzenia i stwierdzenia (4.14) wynika następująca równoważność:

Twierdzenie 4.17 *Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, będzie niezdegenerowaną osobliwością. Następujące warunki są równoważne:*

- *Nośnik f spełnia warunek Kuznirenki*
- *f jest osobliwością izolowaną*

Uwaga 4.18 Powyższe twierdzenie dla $n = 2$ było podane przez A. Lenarcika [Len98, Property 3.2] oraz w pracy [Ole13a, Theorem 5.4] dla $n \leq 3$. Rozstrzyga ono pozytywnie hipotezę podaną w [Ole13a, Conjecture 5.5].

Uwaga 4.19 Były badane inne typy niedegeneracji niż niedegeneracja w sensie Kuznirenki. C.T.C. Wall uzyskał podobne rezultaty do naszych dla innego typu niedegeneracji (zob. Lemma 1.2 i Theorem 1.6 w [Wal99]).

Założenie niedegeneracji jest konieczne w powyższym twierdzeniu, na co wskazuje następujący przykład:

Przykład 4.20 Osobliwość $f(z) = (z_1 + z_2)(z_1 + z_3)$ ma nośnik spełniający warunek Kuznirenki, ale nie jest osobliwością izolowaną. Nietrudno sprawdzić, że f jest zdegenerowana na jedynej ścianie dwuwymiarowej diagramu $\Gamma(f)$.

Następujące twierdzenie podaje wyjaśnienie, skąd wzięła się nazwa warunku Kuznirenki.

Twierdzenie 4.21 [Kou77, Theorem 1] *Niech $M \subset \mathbb{N}_0^n$ oraz $\text{ord } \lambda_M \geq 2$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

- (ISe) *Istnieje osobliwość izolowana $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ taka, że $\text{supp } f \subset M$,*
- (ISg) *Osobliwość f , $\text{supp } f \subset M$, z generycznymi współczynnikami jest osobliwością izolowaną.*
- (K) *M spełnia warunek Kuznirenki*

Ponadto w pracy [BO16] dowodzimy, że warunek Kuznirenki dla M jest równoważny skończoności liczby Newtona λ_M [Ole13a, Corollary 3.12]. Kuznirenko podał ten fakt bez dowodu [Kou76, Remarque 1.13 (ii)]. Równoważność ta jest ważnym krokiem w dowodzie głównego twierdzenia 4.16. Kolejnym krokiem w tym dowodzie jest skorzystanie z wzoru na liczbę Milnora podanego w 1976 roku przez Kuznirenko:

Twierdzenie 4.22 [Kou76] *Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i dogodną. Wówczas $\mu(f) \geq \nu(f)$, przy czym równość zachodzi, jeśli f jest niezdegenerowana.*

Uwaga 4.23 Kuznirenko w powyższym twierdzeniu podaje wzór na liczbę Milnora tylko w przypadku dogodnych osobliwości. Wielu nawet znanych autorów cytuje ten wzór tylko w takim przypadku (zob. [DG83, Section 2], [Wal99]). Tymczasem Kuznirenko udowodnił go również w klasie niedogodnych osobliwości [Kou76, Section 3], ale nie podał ogólniejszej wersji swojego twierdzenia explicite. Aby rozjaśnić tę sytuację, podajemy jawnie ogólniejszą wersję twierdzenia Kuznirenki w pracy [Ole13a, Corollary 3.10]. Nasz dowód dla niedogodnych osobliwości używa [Ole13a, Lemma 3.8].

W pracy [Ole20] podajemy charakteryzację wymiaru punktów krytycznych osobliwości niezdegenerowanej w terminach jej nośnika. Jest to uogólnienie twierdzenia 4.16 na przypadek osobliwości nieizolowanych.

Niech $n \leq 3$ oraz $0 \leq d \leq n$.

Twierdzenie 4.24 [Ole20, Thm 3.2], *Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, będzie niezdegenerowaną osobliwością. Następujące warunki są równoważne:*

- *Nośnik f spełnia (d) -warunek Kuznirenki i nie spełnia $(d-1)$ -warunku Kuznirenki*
- $\dim_0 \Sigma f = d$,

Uwaga 4.25 Twierdzenie powyższe jest najprawdopodobniej prawdziwe także dla $n > 3$, wkrótce pojawi się moja praca na ten temat.

Z powyższego twierdzenia wyprowadziliśmy następujący wniosek, który pokazuje że wymiar zbioru punktów krytycznych niezdegenerowanej osobliwości zależy tylko od jej diagramu Newtona.

Wniosek 4.26 [Ole20, Thm 3.3] *Niech $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, będą niezdegenerowanymi osobliwościami. Jeśli $\Gamma_+(f) = \Gamma_+(g)$, to $\dim_0 \Sigma f = \dim_0 \Sigma g$.*

Jako bezpośrednią konsekwencję powyższych dwóch twierdzeń dostajemy następujący wniosek.

Wniosek 4.27 [Ole20, Thm 3.4] *Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$, będzie niezdegenerowaną osobliwością oraz niech V będzie zbiorem wierzchołków $\Gamma_+(f)$. Następujące warunki są równoważne:*

- *Zbiór V spełnia (d) -warunek Kuznirenki i nie spełnia $(d-1)$ -warunku Kuznirenki*
- $\dim_0 \Sigma f = d$.

Podamy jeszcze dwa interesujące wnioski z twierdzenia 4.24.

Wniosek 4.28 [Ole13a, Corollary 4.8] *Niech $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, będą osobliwościami. Jeśli g jest niezdegenerowaną osobliwością oraz $\text{supp } f \subset \text{supp } g$, to*

$$\dim_0 \Sigma g \leq \dim_0 \Sigma f.$$

Bezpośrednią konsekwencją tego wniosku jest następująca własność.

Wniosek 4.29 [Ole13a, Corollary 4.9] *Niech $f, g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, będą osobliwościami. Jeśli $f + g$ jest niezdegenerowaną osobliwością oraz $\text{supp } f \cap \text{supp } g = \emptyset$, to*

$$\dim_0 \Sigma(f + g) \leq \min\{\dim_0 \Sigma f, \dim_0 \Sigma g\}.$$

Przykład 4.30 [Ole13a, Example 4.10] Założenie, że $f + g$ jest niezdegenerowaną osobliwością jest konieczne w powyższym wniosku. Istotnie, niech $f(x, y) = x^2 + y^2$ oraz $g = 2xy$. Wówczas $f + g$ jest zdegenerowaną osobliwością oraz

$$\dim_0 \Sigma(f + g) = 1 > 0 = \min\{\dim_0 \Sigma f, \dim_0 \Sigma g\}.$$

Co do wkładu poszczególnych autorów w pracy [BO16], to odbywaliśmy wielokrotnie wspólne konsultacje naukowe i udział każdego z autorów jest znaczący. Jeśli miałbym jednak zaznaczyć kilka moich akcentów, to są one następujące:

- Pomysł zajęcia się tym tematem [Ole13a, Conjecture 5.5], wcześniej udowodniłem twierdzenie 4.16 dla $n \leq 3$ [Ole13a, Theorem 5.4].
- Praca nad [BO16, Lemmas 3.6 – 3.8, Proposition 4.2].

4.5 Liczby Lê (praca [EOR21])

Niech $z = (z_1, \dots, z_n)$ będzie ustalonym układem współrzędnych w $\mathbb{C}^n$ oraz niech kielek $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością. Oznaczmy $d = \dim_0 \Sigma f$. W przypadku, gdy $d = 0$, czyli f jest osobliwością izolowaną możemy zdefiniować jej liczbę Milnora:

$$\mu_f(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_0,$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie powyższej definicji oznacza krotność odwzorowania gradientowego w zerze. Jest ona jednym z najważniejszych niezmienników topologicznych osobliwości izolowanych. Gdy $d > 0$ liczba Milnora nie jest już dobrze określona. Wówczas jednym z jej uogólnień są liczby Lê wprowadzone przez D. Massey’a w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku [Mas95]. Są to liczby rączek odpowiedniego wymiaru w rozkładzie włókna Milnora [Mas95, Theorem 3.3]. Dokładna definicja jest podana w [Mas95, Def. 1.11]. Mają one podobne własności do liczby Milnora i zerowa liczba Lê pokrywa się z liczbą Milnora w przypadku osobliwości izolowanych:

- $d = 0, f \rightarrow \mu_f(0) = \lambda_{f,z}^0(0)$
- $d \geq 0, f \rightarrow \lambda_{f,z}(0) := (\lambda_{f,z}^0(0), \lambda_{f,z}^1(0), \dots, \lambda_{f,z}^d(0))$

Indeks dolny z w notacji liczb Lê oznacza, że zależą one od konkretnego układu współrzędnych. Jednak dla dostatecznie generycznych układów współrzędnych wartości liczb Lê są takie same i nazywamy je wtedy *generycznymi liczbami Lê*. Są to dokładnie liczby Segre ideału gradientowego [GG99]. Podobnie jak liczba Milnora $\mu_f(0)$ jest półciągła z góry w rodzinie deformacji f , układ liczb $\lambda_{f,z}(0)$ jest półciągły z góry w rodzinie deformacji f w porządku leksykograficznym.

Celem pracy [EOR21] jest uogólnienie wyniku Kusznirenki [Kou76] na przypadek osobliwości niezolowanych ($d > 0$), czyli odczytanie liczb Lê osobliwości f z jej diagramu Newtona. Najpierw uogólnimy pojęcie liczby Newtona. Załóżmy, że f jest niezdegenerowana i jej liczby Lê istnieją. Wówczas w rozwinięciu f nie ma jednomianów postaci $z_1^{\alpha_1}, \dots, z_d^{\alpha_d}$ [EOR21, Lemma 7.1]. Rozważmy funkcję:

$$f_d = f + z_1^{\alpha_1} + \dots + z_d^{\alpha_d}, \quad 1 \ll \alpha_1 \ll \dots \ll \alpha_d.$$

Stowarzyszymy z $\Gamma_+(f_d)$ pewne nieujemne liczby całkowite (będące odpowiednikiem liczby Newtona):

- Niech $\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}$, $\Gamma(f_d)^I \neq \emptyset$,
- Weźmy podział symplecjalny $\Gamma(f_d)^I$ taki, że wszystkie wierzchołki jego sympleksów są jednocześnie wierzchołkami $\Gamma(f_d)^I$,
- Stożki o wierzchołku w $0 \in \mathbb{R}^n$, rozpięte na sympleksach tego podziału wyznaczają podział symplecjalny $\Gamma_-(f_d)^I$,
- Ξ_I – rodzina powyższych stożków,
- $i_0 \in \{1, \dots, d\}$,
- Ξ_{I, i_0} – podrodzina sympleksów $S \in \Xi_I$ maksymalnego wymiaru, taka że każdy jej sympleks S ma krawędź na osi OX_{i_0} i nie ma żadnej krawędzi na osiach OX_i , $i \in \{1, \dots, d\}$, $i \neq i_0$,
- $S \in \Xi_{I, i_0}$ – S ma wierzchołek $(0, \dots, 0, \alpha_{i_0}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$,
- $S \in \Xi_{I, i_0}$ odpowiada sympleks *zredukowany* $\tilde{S}$ tzn. sympleks o tych samych wierzchołkach co S za wyjątkiem wierzchołka $(0, \dots, 0, \alpha_{i_0}, 0, \dots, 0)$, który zastępujemy wierzchołkiem $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$,
- $\tilde{\Xi}_{I, i_0}$ – zbiór zredukowanych sympleksów,
- $\Xi := \{\Xi_I\}_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset}$,

Możemy teraz określić *zmodyfikowane liczby Newtona osobliwości f* :

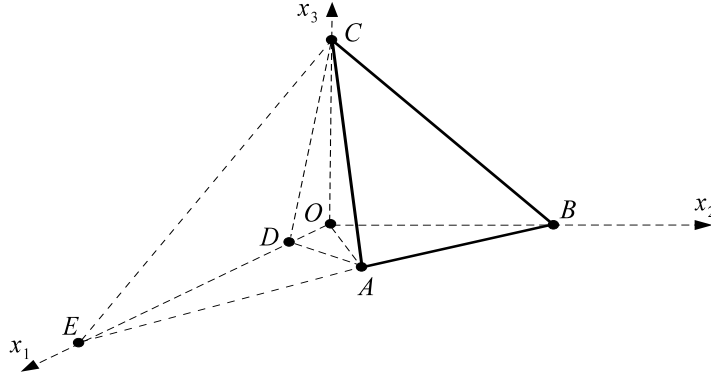
$$\tilde{\nu}_{\Xi, i_0}(f) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \ni i_0} \sum_{\tilde{S} \in \tilde{\Xi}_{I, i_0}} (-1)^{n-|I|} |I|! \text{Vol}_{|I|}(\tilde{S}),$$

$i_0 \in \{1, \dots, d\}$.

Określimy teraz pewną liczbę stowarzyszoną z samym diagramem $\Gamma(f)$. Niech $\Xi_{I, 0}$ będzie podrodziną sympleksów $S \in \Xi_I$ maksymalnego wymiaru, takich że S nie ma krawędzi na żadnej osi OX_i , $i \in \{1, \dots, d\}$. Zatem sympleksy $\Xi_{I, 0}$ „pochodzą” tylko z $\Gamma(f)$. Liczbę:

$$\nu_{\Xi, 0}(f) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} \sum_{S \in \Xi_{I, 0}} (-1)^{n-|I|} |I|! \text{Vol}_{|I|}(S),$$

będziemy nazywać *wyróżnioną zmodyfikowaną liczbą Newtona osobliwości f* .



Rysunek 3: Diagram Newtona f i f_1

Uwaga 4.31 Zauważmy, że sympleksy użyte w definicji zmodyfikowanej liczby Newtona są zredukowane, natomiast sympleksy użyte w definicji wyróżnionej zmodyfikowanej liczby Newtona nie są zredukowane.

Możemy teraz podać główny wynik omawianej w tej sekcji pracy, czyli uogólnienie twierdzenia Kuznirenki na przypadek nieizolowany:

Twierdzenie 4.32 [EOR21, Theorem 4.1] *Niech $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością niezdegenerowaną, $d := \dim_0 \Sigma f \geq 1$. Załóżmy, że liczby $\lambda_{f,z}^k(0)$ istnieją dla każdego $k = 0, \dots, d$, w układzie współrzędnych $z = (z_1, \dots, z_n)$. Wówczas:*

- (1) *Zmodyfikowane liczby Newtona $\nu_{\Xi,0}(f_d)$ i $\tilde{\nu}_{\Xi,k}(f_d)$ funkcji f_d nie zależą od wyboru $\Xi := \{\Xi_I\}_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset}$. Zatem możemy w dalszym ciągu uprościć oznaczenia w następujący sposób:*

$$\nu_0(f_d) := \nu_{\Xi,0}(f_d) \quad \text{ i } \quad \tilde{\nu}_k(f_d) := \tilde{\nu}_{\Xi,k}(f_d).$$

- (2) *Liczby Lê określone są następującymi wzorami:*

$$\begin{aligned} \lambda_{f,z}^0(0) &= (-1)^n + \nu_0(f_d) + \tilde{\nu}_1(f_d); \\ \lambda_{f,z}^k(0) &= (-1)^{k-1}(\tilde{\nu}_k(f_d) - \tilde{\nu}_{k+1}(f_d)), \quad 1 \leq k \leq d-1 \\ \lambda_{f,z}^d(0) &= (-1)^{d-1} \tilde{\nu}_d(f_d). \end{aligned}$$

Pierwszym ważnym wnioskiem, jaki wyprowadzamy z twierdzenia 4.32 jest stałość liczb Lê w osobliwości niezdegenerowanych o tym samym diagramie Newtona.

Wniosek 4.33 [EOR21, Corollary 5.1] *Niech $f, g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będą niezdegenerowanymi osobliwościami nieizolowanymi. Jeśli $\Gamma(f) = \Gamma(g)$ i liczby Lê osobliwości f i g istnieją, to:*

- $\dim_0 \Sigma f = \dim_0 \Sigma g = d$,
- $\lambda_{f,z}^k(0) = \lambda_{g,z}^k(0)$, $0 \leq k \leq d$.

Uwaga 4.34 Istnienie liczb Lê nie jest konieczne w wykazaniu równości wymiarów zbiorów punktów krytycznych. W istocie diagram osobliwości niezdegenerowanej determinuje jej wymiar zbioru punktów krytycznych, co pokazujemy w [Ole20] dla $n \leq 3$. Fakt ten jest również prawdziwy dla $n > 3$, praca na ten temat jest przygotowywana przez mnie.

Bezpośrednio z wniosku 4.33 dostajemy stałość liczb Lê w rodzinie deformacji o stałym diagramie Newtona:

Wniosek 4.35 *Niech $\{f_t\}$ będzie rodziną niezdegenerowanych osobliwości. Załóżmy, że dla dostatecznie małych t liczby Lê osobliwości f_t i f_0 istnieją oraz $\Gamma(f_t) = \Gamma(f_0)$. Wówczas mamy:*

- $\dim_0 \Sigma f_t = \dim_0 \Sigma f_0 = d$,
- $\lambda_{f_t, z}^k(0) = \lambda_{f_0, z}^k(0)$, $0 \leq k \leq d$.

Uwaga 4.36 Prawdziwość powyższych wniosków dla izolowanych osobliwości ($d = 0$) wynika z twierdzenia Kuznirenki [Kou76]

Z powyższego wniosku oraz z [Mas95, Theorem 9.4], [Bob13, Theorem 42] dostajemy nowy dowód następującego faktu:

Wniosek 4.37 *Niech $\{f_t\}$ będzie rodziną niezdegenerowanych osobliwości. Załóżmy, że dla dostatecznie małych t liczby Lê osobliwości f_t i f_0 istnieją oraz $\Gamma(f_t) = \Gamma(f_0)$. Wówczas mamy:*

- *Jeśli $z = (z_1, \dots, z_n)$ jest prepolarnym układem współrzędnych dla f_t oraz $\dim_0 \Sigma f_t \leq n - 4$, to typ dyfeomorficzny włókna Milnora f_t w 0 jest niezależny od t ,*
- *Jeśli $n \geq 5$ i $\dim_0 \Sigma f_t = 1$, to rodzina f_t jest topologicznie trywialna.*

Uwaga 4.38 Powyższy wniosek to szczególny przypadek znacznie ogólniejszego twierdzenia J. Damona [Dam81].

Z [Mas95, Theorem 3.3] mamy:

$$\tilde{\chi}(F_{f,0}) = \sum_{k=0}^d (-1)^{n-1-k} \lambda_{f,z}^k(0).$$

Korzystając teraz z głównego wyniku omawianej pracy (Twierdzenie 4.32) zastępujemy liczby $\lambda_{f,z}^k(0)$ przez wzory na nie, podane w języku zmodyfikowanych liczb Newtona i dostajemy wtedy następujący wniosek pozwalający obliczać charakterystykę Eulera włókna Milnora.

Wniosek 4.39 *Niech f będzie niezdegenerowaną i nieizolowaną osobliwością oraz $z = (z_1, \dots, z_n)$ będzie prepolarnym układem współrzędnym dla f . Wówczas zredukowana charakterystyka Eulera $\tilde{\chi}(F_{f,0})$ włókna Milnora $F_{f,0}$ funkcji f w 0 wyraża się wzorem:*

$$\tilde{\chi}(F_{f,0}) = (-1)^{n-1}(\nu_0(f_d) + (-1)^n),$$

gdzie $d = \dim_0 \Sigma f \geq 1$.

Powyższy fakt był prawdopodobnie już znany wcześniej V. I. Arnoldowi.

Jeśli chodzi o wkład poszczególnych autorów w omówione w tej sekcji wyniki, to na początku chciałbym zaznaczyć, że autorzy odbyli wspólnie wiele konsultacji w dłuższym okresie czasu i wkład każdego z nich był istotny. Stąd trudne jest szczegółowe wydzielenie udziałów. Jeśli miałbym jednak zaznaczyć kilka moich akcentów, to są one następujące:

- Dowód głównego twierdzenia [EOR21, Theorem 4.1], w przypadku, gdy zbiór punktów krytycznych jest jednowymiarowy,
- Dowód [EOR21, Lemma 7.1],
- Dowód [EOR21, Corollary 5.1].

4.6 Wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności (praca [Ole22])

Poprzednie prace z cyklu dotyczyły sytuacji lokalnej, badaliśmy kielki funkcji holomorficznych w 0. W pracy [Ole22] badamy zachowanie wielomianów i odwzorowań wielomianowych wagowojednorodnych i pre-wagowojednorodnych w nieskończoności. Głównym wynikiem tej pracy jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.40 *Niech $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ będzie wagowojednorodnym wielomianem typu $(w_1, \dots, w_n)$, $w_i \geq 2$, $i = 1, \dots, n$, o skończonej liczbie punktów krytycznych. Wówczas*

$$\mathcal{L}_\infty(f) = \min_{i=1}^n w_i - 1 \quad (6)$$

Uwaga 4.41 Zauważmy, że diagram Newtona w nieskończoności dla osobliwości wagowojednorodnych, których wagi spełniają powyższe warunki, składa się tylko z jednej ściany $(n-1)$ -wymiarowej. Wtedy wyrażenie po prawej stronie formuły (6) w języku geometrycznym oznacza minimum ze współrzędnych przecięcia hiperpłaszczyzny zawierającej tę ścianę z osiami układu współrzędnych. Zatem wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności w tej klasie wielomianów daje odczytać się z diagramu Newtona. W tym sensie rezultat ten jest również potwierdzeniem hipotezy Arnolda dla wielomianów.

Powyższe twierdzenie ma następującą lokalną wersję:

Twierdzenie 4.42 [Abd16, Brz15, KOP09] *Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną, której reprezentantem jest wagowojednorodny wielomian typu $(w_1, \dots, w_n)$, $w_i \geq 2$, $i = 1, \dots, n$. Wówczas*

$$\mathcal{L}_0(f) = \max_{i=1}^n w_i - 1. \quad (7)$$

Ponadto w tej pracy interesujemy się własnością właściwości odwzorowań wielomianowych wagowojednorodnych oraz Hipotezę Jakobianową. Podamy teraz proste kryterium właściwości:

Twierdzenie 4.43 *Niech $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, $m \geq n$, będzie wagowojednorodnym odwzorowaniem wielomianowym typu $(q_1, \dots, q_n; d_1, \dots, d_m)$, $d_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Wówczas F jest odwzorowaniem właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy $q_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ i $F^{-1}(0) = \{0\}$.*

Jest to naturalne rozszerzenie na przypadek wagowojednorodny znanego kryterium właściwości dla wielomianów jednorodnych. Jako wniosek z powyższego kryterium właściwości dostajemy potwierdzenie Hipotezy Jakobianowej w klasie wagowojednorodnej.

Twierdzenie 4.44 [Ole22, Theorem 4.4] *Niech $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ będzie wagowojednorodnym odwzorowaniem wielomianowym o dodatnich wagach. Jeśli $\text{Jac } F \equiv 1$, wtedy F jest automorfizmem wielomianowym.*

Korzystając z [Ole22, Corollary 5.4] wykazujemy właściwość pre-wagowojednorodnego odwzorowania F i potwierdzamy Hipotezę Jakobianową w klasie pre-wagowojednorodnej.

Twierdzenie 4.45 [Ole22, Theorem 5.5] *Niech $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ będzie pre-wagowojednorodnym odwzorowaniem wielomianowym typu $(q_1, \dots, q_n)$, $q_i > 0$. Jeśli $\text{Jac } F \equiv 1$, wtedy F jest automorfizmem wielomianowym.*

Nietrudno sprawdzić (zob. początek dowodu twierdzenia 4.44), że jeśli F jest wagowojednorodnym odwzorowaniem wielomianowym o dodatnich wagach i $\text{Jac } F \equiv 1$ wtedy $F^{-1}(0) = \{0\}$, czyli F jest pre-wagowojednorodny. Zatem twierdzenie 4.45 jest uogólnieniem twierdzenia 4.44.

Pojawia się pytanie, czy główny wynik tej pracy jest prawdziwy bez ograniczeń na wagi. Jeśli wagi są dodatnie, to podajemy oszacowanie w bardziej ogólnym pre-wagowojednorodnym przypadku:

Wniosek 4.46 [Ole22, Corollary 5.4] *Niech $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie pre-wagowojednorodnym wielomianem względem $(q_1, \dots, q_n)$, $q_i > 0$. Wówczas mamy*

$$\min_{i=1}^n w_i - 1 \leq \mathcal{L}_\infty(f) \leq \max_{i=1}^n w_i - 1, \quad (8)$$

gdzie $w_i = (\deg_q f)/q_i, i = 1, \dots, n$.

Nie znamy takiego kontrprzykładu, w którym lewa nierówność jest ostra, wymaga to dalszych badań. Sytuacja komplikuje się bardziej, gdy dopuszczamy, że wagi są ujemne, wtedy gradient wielomianu jest odwzorowaniem niewłaściwym. Korzystając z formuły na wykładnik w nieskończoności podanej przez Lenarcika [Len99] dla osobliwości krzywych podajemy analogiczną formułę jak w głównym wyniku bez ograniczeń na wagi.

Twierdzenie 4.47 [Ole22, Theorem 6.1] *Niech $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie wagowojednorodnym wielomianem typu (w_1, w_2) o skończonej liczbie punktów krytycznych. Załóżmy, że f nie jest jednomianem. Wówczas mamy*

$$\mathcal{L}_\infty(f) = \min(w_1, w_2) - 1. \quad (9)$$

Założenie, że f nie jest jednomianem jest potrzebne do uzyskania jednoznaczności wag. Biorąc pod uwagę przykłady [Ole22, Example 6.2, 6.3], przypuszczamy, że prawdziwa jest następująca hipoteza:

Hipoteza 4.48 [Ole22, Conjecture 6.4] *Niech $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie wagowojednorodnym wielomianem typu $(w_1, \dots, w_n)$ oraz $\nabla f^{-1}(0) = \{0\}$. Załóżmy, że typ $(w_1, \dots, w_n)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez f . Wówczas mamy*

$$\mathcal{L}_\infty(f) = \min_{i=1}^n w_i - 1. \quad (10)$$

4.7 Pozostałe prace

Prace spoza cyklu

- [BKO12] Brzostowski, S., Krasiński, T., Oleksik, G.: *A conjecture on the Łojasiewicz exponent*. J. Sing. 6: 124 – 130, (2012)
- [BKO22] Brzostowski Sz., Krasiński T., Oleksik G.: *Zariski multiplicity conjecture in families of non-degenerate singularities*. chapter [in:] Analytic and Algebraic Geometry 4: 53 – 60, Krasiński, T., Spodzieja, S. (ed.), WUŁ, Łódź, (2022)
- [KOP09] Krasiński, T., Oleksik, G., Płoski, A.: *The Łojasiewicz exponent of an isolated weighted homogeneous surface singularities*. Proc. Amer. Math. Soc. 137: 3387 – 3397, (2009)
- [Ole08] Oleksik, G.: *O pewnej własności ideału gradientowego*. Materiały na XXIX Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespółonej: 35 – 40, Łódź, (2008)
- [Ole09a] Oleksik, G.: *Wykładnik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanych*. Materiały na XXX Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespółonej: 19 – 26, Łódź, (2009)
- [Ole09b] Oleksik, G.: *The Łojasiewicz exponent of nondegenerate singularities*. Univ. Iagellonicae Acta Math. 47:301 – 308, (2009)
- [Ole10] Oleksik, G.: *Wykładnik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanych*. Praca doktorska, Uniwersytet Łódzki, (2010)
- [Ole11] Oleksik, G.: *Combining random generators by group operation*. Int. J. Comp. Math. 88: 3577 – 3585, (2011)
- [Ole12] Oleksik, G.: *The Fukui inequality for the Łojasiewicz exponent of nondegenerate convenient singularities*. Proceedings of the XXXIII Conference and Workshop ”Analytic and Algebraic Geometry: 51 – 58, Łódź, (2012)
- [Ole13a] G. Oleksik, G.: *On combinatorial criteria for isolated singularities*. chapter [in:] Analytic and Algebraic Geometry 1: 81 – 94, Krasiński, T., Spodzieja S. (ed.), WUŁ, Łódź, (2013)
- [Ole13b] Oleksik, G.: *The Łojasiewicz exponent of nondegenerate surface singularities*. Acta Math. Hung. 138, 179 – 199, (2013)
- [Ole15] Oleksik, G.: *On the nondegenerate jumps of the Łojasiewicz exponent*. Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform. 55: 9 – 20, (2015)
- [OR18] Oleksik, G., Różycki A.: *The Łojasiewicz exponent at infinity of non-negative and non-degenerate polynomials*. Bull. Braz. Math. Soc., New Series 49: 743 – 759, (2018)

- [OR22] Oleksik G., Różycki A: *Some notes on the $L\hat{e}$ numbers in the family of line singularities*. chapter [in:] *Analitic and Algebraic Geometry 4*: 137 – 146, Krasieński, T., Spodzieja, S. (ed.), WUŁ, Łódź, (2022)

Omówimy teraz krótko zawartość powyższych prac:

Wyniki pracy doktorskiej [Ole10] zostały opublikowane w artykułach [KOP09, Ole08, Ole09a, Ole09b, Ole13b]. Dotyczą one zasadniczo odczytywania wykładnika Łojasiewicza:

- a) osobliwości wagowojednorodnej 3-zmiennych z jej wag [KOP09, Ole08]
- b) osobliwości niezdegenerowanej z jej diagramu Newtona [Ole09a, Ole09b, Ole13b].

W pracy [Ole08] udowodniono kluczowy lemat, potrzebny w dowodzie formuły na wykładnik Łojasiewicza osobliwości wagowojednorodnej 3-zmiennych podanej w pracy [KOP09]. Lemat ten podany tu w nieco innej formie (por. tw. 1.2.1 w pracy doktorskiej) jest wzmocnieniem lokalnej wersji tw. Hilberta o zerach (local Nullstellensatz). Jest to rezultat sam w sobie interesujący. W pracy [KOP09] dowodzimy ponadto, że wykładnik Łojasiewicza jest niezmiennikiem topologicznym w klasie osobliwości wagowojednorodnych 3-zmiennych. Z kolei w artykule [Ole09b] podajemy oszacowanie z góry wykładnika Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanej. Główna myśl polega na odrzucaniu pewnych ścian jej diagramu Newtona (w pracy doktorskiej zwanych istotnie wyjątkowymi), tak aby poprawić oszacowanie wykładnika Łojasiewicza podane przez Fukui [Fuk91]. W [Ole09a] wykazujemy osłabioną wersję głównego twierdzenia z pracy [Ole09b]. Praca [Ole13b] zawiera oszacowanie z góry wykładnika Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanej 3-zmiennych. Jest to istotne wzmocnienie wyniku Fukui [Fuk91]. Kluczową rolę odgrywa tu definicja ściany wyjątkowej, która ostatecznie okazała się na tyle odpowiednia, że uzyskane oszacowanie jest w istocie równością, co pokazaliśmy w pracy [BKO23].

W pracy [Ole12] przedstawiono prosty (używający jedynie lematu o wyborze krzywej) dowód oszacowania z góry wykładnika Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanej, podanego przez Fukui [Fuk91], ale uzyskany przy dodatkowym założeniu, że osobliwość ta jest dogodna.

Praca [BKO12] zawiera hipotezę, w której podajemy wzór na wykładnik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanej w przypadku n -wymiarowym. Potwierdzamy ją dla $n = 3$ przy założeniu, że diagram Newtona osobliwości składa się tylko z jednej niewyjątkowej ściany dwuwymiarowej. Ponadto podajemy w tej pracy wzór na wykładnik Łojasiewicza osobliwości semi-wagowojednorodnych 3-zmiennych.

Rozdział w monografii [Ole13a] ma charakter przeglądowy i dotyczy kombinatorycznej charakteryzacji osobliwości izolowanej (podanej w terminach jej nośnika). Jako nowy rezultat podajemy warunki wystarczające na nośnik osobliwości niezdegenerowanej, tak aby przy ich spełnieniu osobliwość ta stała się izolowana.

W pracy [Ole15] podajemy wzory na skok z dołu i skok z góry wykładnika Łojasiewicza osobliwości krzywych w rodzinie jej niezdegenerowanych deformacji. Ciekawe jest w tej pracy spotkanie teorii osobliwości z teorią liczb, a dokładniej z ułamkami Farey’a.

Praca [OR18] dotyczy klasy wielomianów rzeczywistych nieujemnych w nieskończoności o niezwartym zbiorze zer. Odczytujemy w niej wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności w pobliżu poziomicy zerowej dla wielomianów niezdegenerowanych z ich wielością

Newtona. Ponadto podajemy w niej wzór na wykładnik wzrostu w nieskończoności (daleko od poziomu zerowej) takich wielomianów.

W pracy [OR22] wprowadzamy pojęcie skoku liczb Lê w rodzinie osobliwości, których zbiór punktów krytycznych jest gładką krzywą. Dowodzimy w niej istnienia λ^1 -const deformacji niezdegenerowanej osobliwości f , przy czym zerowa liczba Lê tej deformacji wynosi 0. Podajemy także oszacowania liczb Lê dla osobliwości z jednowymiarowym zbiorem punktów krytycznych. Jest to uogólnienie słynnego twierdzenia Kuznirenki [Kou76] w tym przypadku.

Hipoteza Tessier [Tes77] mówi, że w rodzinie μ -const osobliwości izolowanych rząd jest stały. W pracy [BKO22] podajemy jej elementarny dowód w klasie niezdegenerowanej. Wcześniej Abderrahmane [Abd16] potwierdził tę hipotezę pozytywnie w tej klasie, używając zaawansowanych narzędzi teorii osobliwości. W naszym dowodzie korzystamy istotnie z twierdzenia [L-AMS21, Thm. 2.25]. Ostatnio ukazała się praca [Sel24], w której podano kontrprzykład do tego twierdzenia. Kontrprzykład ten zawiera osobliwość rzędu 2, co sugeruje że to twierdzenie może być nadal prawdziwe w przypadku, gdy rząd deformowanej osobliwości jest większy od 2. W naszym dowodzie hipotezy Tessier potrzebujemy tego twierdzenia właśnie w tym przypadku. Zatem jest szansa, że nasz dowód jest nadal poprawny, ale wymaga to dalszych badań.

Praca [Ole11] jako jedyna z tutaj omawianych nie dotyczy teorii osobliwości, ale znajduje się na pograniczu rachunku prawdopodobieństwa, statystyki i informatyki. Dokładniej pokazujemy w niej, że łączenie generatorów losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$ (zmiennych losowych o wartościach w grupie skończonej) za pomocą operacji grupowych (np. operacji modulo) poprawia losowość otrzymanego w ten sposób nowego generatora $X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Podajemy w niej również oszacowanie prędkości zbieżności do jednostajnego generatora, gdy $n \rightarrow \infty$, co ma znaczenie praktyczne.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

- Współpraca naukowa z IMPAN w Warszawie (Z. Jelonek, Ch. Eyrat) od 2018 do obecnie. Udział we wspólnych seminariach IMPAN. Efektem tej współpracy naukowej jest publikacja [EOR21]
- Dwutygodniowe konsultacje naukowe z Pham Tien Son i jego współpracownikami odbywające się w Wietnamie w Hanoi w VIASM (Vietnam Advanced Study of Mathematics) w marcu 2019 roku. Udział w tym czasie w międzynarodowych warsztatach pt. „Mini-course on Moments, Positive Polynomials and Applications” wraz z referatem. Wygłoszenie referatu na Seminarium w VIASM. Konsultacje te odbywały się w ramach realizacji grantu NCN, Miniatura 2: „Wykładnik Łojasiewicza wielomianów rzeczywistych i zespolonych”.
- Współpraca naukowa z Politechniką Świętokrzyską (A. Płoski, A. Lenarcik). Udział

we wspólnych seminariach łódzko-kieleckich oraz łódzko-kielecko-krakowskich. Powstała wspólna praca z A. Płoskim [KOP09]. Byłem także wykonawcą w granicie „Nieznienniki osobliwości krzywych i hiperpowierzchni analitycznych” (2008-2012), kierownik A. Lenarcik.

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

6.1 Osiągnięcia dydaktyczne

- Promotor i recenzent prac magisterskich i inżynierskich z matematyki oraz analizy danych.
- Skrypt z kryptografii
- Kurs pedagogiczny
- Kurs języka migowego
- Kurs „Kreatywny asystent– kreatywny student” na Uniwersytecie Łódzkim
- Szkolenie „Metodyki kształcenia studentów z różnymi rodzajami niepełnosprawności”
- Udział w szkoleniach z Analizy Danych potwierdzony certyfikatami:
 - „Data Mining - metody bez nauczyciela w Statistice”
 - „Designing Business Intelligence Solutions with Microsoft SQL Server”
 - „Architektura Big – Data”

6.2 Osiągnięcia organizacyjne i popularyzatorskie

- Pełnomocnik Dziekana ds. potwierdzania efektów kształcenia
- Sekretarz w Komisji Rekrutacyjnej
- Udział w pracach nad powstaniem nowego kierunku Analiza Danych
- Sekretarz Ogólnopolskiej Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Algebraicznej i Analitycznej w Łodzi (2008-2022)
- Popularyzacja nauki - festiwale nauki, warsztaty (m.in. z kryptografii dla uczniów Liceum im. Marszałka S. Małachowskiego w Płocku, jednego z najstarszych w Europie)
- Udział w programie „Zdolny uczeń – Świetny student”
- Współdział w tworzeniu studenckiego koła matematycznego SFM (Stowarzyszenie Fascynatów Matematyki) na Wydziale Matematyki i Informatyki UŁ

Literatura

- [Abd05] Abderrahmane, Y.O.M.: *On the Łojasiewicz exponent and Newton polyhedron*. Kodai Math. J. 28(1): 106 – 110, (2005)
- [Abd16] Abderrahmane, Y.O.M.: *On deformation with constant Milnor number and Newton polyhedron*. Math. Z. 284: 167 – 174, (2016)
- [Abd17] Abderrahmane, Y.O.M.: *The Łojasiewicz exponent for weighted homogeneous polynomial with isolated singularity*. Glasgow Math. J. 59: 493 – 502, (2017)
- [AK05] D’Acunto, D. Kurdyka, K.: *Explicit bounds for the Łojasiewicz exponent in the gradient inequality for polynomials*. Ann. Polon. Math. 87: 51 – 61, (2005)
- [Ali09] Aliashvili, T.: *Geometry and topology of proper polynomial mappings*. J. Math. Sci. 160: 679 – 692, (2009)
- [Arn04] Arnold, V. I.: *Arnold’s problems*. Springer-Verlag, Berlin; PHASIS, Moscow, (2004)
- [AGV85] Arnold, V. I, Gusein-Zade, S. M., Varchenko, A. N.: *Singularities of Differentiable Maps*. tom 1, Monographs Math. 82, Birkhäuser, Boston, (1985)
- [Auy23] Auyeung S.: *Adjacent Singularities, TQFTs, and Zariski’s Multiplicity Conjecture* ArXiv e-prints, <https://arxiv.org/abs/2308.13925.v1>:1 – 34, apr (2023)
- [Ber75] Bernstein, D.: *The number of roots of a system of equations*. Functional Anal. Appl. 9: 183 – 185, (1975)
- [B-A03] Bivià-Ausina, C.: *Łojasiewicz exponents, the integral closure of ideals and Newton polyhedra*. J. Math. Soc. Japan 55: 655 – 668, (2003)
- [B-A09] Bivià-Ausina, C.: *Local Łojasiewicz exponents, Milnor numbers and mixed multiplicities of ideals*. Math. Z. 262: 389 – 409, (2009)
- [B-AE11] Bivià-Ausina and Encinas, S.: *The Łojasiewicz exponent of a set of weighted homogeneous ideals*. J. Pure Appl. Algebra 215: 578 – 588, (2011)
- [B-AH15] Bivià-Ausina, C., Huarcaya, A. C.: *Growth at infinity and index of polynomial maps*. J. Math. Anal. Appl. 422: 1414 – 1433, (2015)
- [Bob13] Bobadilla, J. F.: *Topological equisingularity of hypersurfaces with 1-dimensional critical set*. Adv. Math. 248: 1199 – 1253, (2013)
- [BP22] Bobadilla, J. F., Pełka, T.: *Symplectic monodromy at radius zero and equimultiplicity of μ -constant families*. ArXiv e-prints, <https://arxiv.org/abs/2204.07007v3>:1–82, apr (2022)

- [BoK79] Bochnak, J., Kucharz, W.: *Sur les germes d'applications différentiables à singularités isolées*. Trans. Amer. Math. Soc. 252: 115 – 131, (1979)
- [BL71] Bochnak, J., Łojasiewicz, S.: *A converse of the Kuiper-Kuo theorem*. Proc. of Liverpool Singularities—Symposium, I (1969/70), Lecture Notes in Math. 192: 254-261, Springer, (1971)
- [BR75] Bochnak, J., Risler, J.J.: *Sur les exposants de Łojasiewicz*. Comment. Math. Helv. 50: 493 – 507, (1975)
- [Brz15] Brzostowski, Sz.: *The Łojasiewicz exponent of semiquasihomogeneous singularities*. Bull. Lond. Math. Soc. 47: 848 – 852, (2015)
- [Brz19] Brzostowski, Sz.: *A note on the Łojasiewicz exponent of non-degenerate isolated hypersurface singularities*. In Tadeusz Krasieński and Stanisław Spodzieja, editors, Analytic and Algebraic Geometry 3: 27 – 40. University of Lodz Press, Łódź, (2019)
- [BK16] Brzostowski, Sz., Krasieński, T.: *Isolated homogeneous and semi-homogeneous hypersurface singularities*. (Polish), In XXXVII Conference and Workshop "Analytic and Algebraic Geometry", University of Lodz Press: 9 – 21, (2016)
- [BKW19] Brzostowski, Sz., Krasieński, T., Walewska, J.: *Arnold's problem on monotonicity of the Newton number for surface singularities*. J. Math. Soc. Japan 71(4): 1257 – 1268, (2019)
- [BP14] Bui, N. T. N., Pham, T. S.: *Computation of the Łojasiewicz exponent of nonnegative and nondegenerate analytic functions*. Internat. J. Math. 25: 1450092, (2014)
- [C-NH96] Cassou-Noguès, P., Ha H. V.: *Théorème de Kuiper-Kuo-Bochnak-Łojasiewicz à l'infini*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 5: 387 – 406, (1996)
- [ChL73] Chang, S. S. i Lu, Y. C.: *On C^0 sufficiency of complex jets*. Canad. J. Math. 25: 874 – 880, (1973)
- [ChK88a] Chądzyński, J. and Krasieński, T.: *The Łojasiewicz exponent of an analytic mapping of two complex variables at an isolated zero*. In: Singularities, Banach Cent. Publ. 20, PWN, Warszawa: 139 – 146, (1988)
- [ChK88b] Chądzyński, J. and Krasieński, T.: *Exponent of growth of polynomial mappings of $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$* . Banach Center Publ. 20: 147 – 160, (1988)
- [ChK92a] Chądzyński, J. and Krasieński, T.: *On the Łojasiewicz exponent at infinity for polynomial mappings of $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$ and components of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$* . Ann. Polon. Math. 57: 291 – 302, (1992)

- [ChK92b] Chądryński, J. and Krasinski, T.: *Sur l'exposant de Łojasiewicz à l'infini pour les applications polynomiales de C^2 dans C^2 et les composantes des automorphismes polynomiaux de C^2* . C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 315: 1399 – 1402, (1992)
- [ChK95] Chądryński, J. and Krasinski, T.: *Resultant and the Łojasiewicz exponent*. Ann. Polon. Math. 61: 95 – 100, (1995).
- [ChK97a] Chądryński, J. and Krasinski, T.: *A set on which the local Łojasiewicz exponent is attained*. Ann. Polon. Math. 67: 297 – 301, (1997)
- [ChK97b] Chądryński, J. and Krasinski, T.: *A set on which the Łojasiewicz exponent at infinity is attained*. Ann. Polon. Math. 67: 191 – 197, (1997)
- [ChK03] Chądryński, J. Krasinski, T.: *The gradient of a polynomial at infinity*. Kodai Math. J. 26: 317 – 339, (2003)
- [CKT99] Cygan E., Krasinski T. and Tworzewski P.: *Separation of algebraic sets and the Łojasiewicz exponent of polynomial mappings*. Invent. Math. 136: 75 – 88, (1999)
- [Dam81] Damon, J. *Newton filtrations, monomial algebras and nonisolated and equivariant singularities*. in: P. Orlik (Ed.), Singularities, I, Arcata, CA, 1981, in: Proc. Sympos. Pure Math. 40: 267 – 276, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1983)
- [DG83] Damon, J., Gaffney, T.: *Topological trivality of deformations of functions and Newton filtrations*. Invent. Math. 72: 335 – 358, (1983)
- [Den05] Denkowski, M.: *The Łojasiewicz exponent of c -holomorphic mappings*. Annales Polonici Mathematici 87: 63 – 81, (2005)
- [Den07] Denkowski, M.: *Regular separation with parameter of complex analytic sets*. Kodai Mathematical Journal 30: 429 – 437, (2007)
- [Den18a] Denkowski, M.: *On the complex Łojasiewicz inequality with parameter*. Kodai Mathematical Journal 41: 359 – 374, (2018)
- [Den18b] Denkowski, M.: *The complex gradient inequality with parameter*. Monatshefte für Mathematik 186: 1 – 10, (2018)
- [DHPT14] Dinh, S. T., Ha, H. V., Pham, T. S., Thao, N. T.: *Global Łojasiewicz-type inequality for non-degenerate polynomial maps*. J. Math. Anal. Appl. 410: 541 – 560 (2014)
- [DHT12] Dinh, S. T., Ha, H. V., Thao, N. T.: *Łojasiewicz inequality for polynomial functions on non-compact domains*. Internat. J. Math. 23: 1250033, (2012)
- [DH10] Duc, N. H, Ha, H. V.: *Łojasiewicz inequality at infinity for polynomials in two real variables*. Math. Z. 266: 243 – 264, (2010)

- [Fuk91] Fukui, T.: *Łojasiewicz type inequalities and Newton diagram*. Proc. Amer. Math. Soc. 112: 1169 – 1183, (1991)
- [GG99] Gaffney, T., Gassler, R.: *Segre numbers and hypersurface singularities*. J. Algeb. Geom. 8: 695 – 736, (1999).
- [GKT13] Le Gal, O., Kurdyka, K., Tiep, D. S.: *Łojasiewicz inequality on non-compact domains and singularities at infinity*. Internat. J. Math. 24: 1350079, (2013)
- [GLS07] Greuel, G.-M., Lossen, C., Shustin, E.: *Introduction to Singularities and Deformations*. Springer Monogr. Math., Springer, Berlin, (2007)
- [Gwo98] Gwoździewicz, J.: *Growth at infinity of a polynomial with a compact zero set*. Banach Center Publ. 44: 123 – 128, (1998)
- [Gwo99] Gwoździewicz, J.: *The Łojasiewicz exponent of an analytic function at an isolated zero*. Comment. Math. Helv. 74: 364 – 375, (1999)
- [Gwo08] Gwoździewicz, J.: *Note on the Newton number*. Univ. Iag. Acta Math. 46: 31 – 33, (2008)
- [GP05] Gwoździewicz, J., Płoski, A.: *Łojasiewicz exponents and singularities at infinity of polynomials in two complex variables*. Colloq. Math. 103: 47 – 60, (2005)
- [GS05] Gwoździewicz, J., Spodzieja, S.: *The Łojasiewicz gradient inequality in a neighbourhood of the fibre*. Ann. Polon. Math. 87: 151 – 163, (2005)
- [Ha90] Ha, H. V.: *Nombres de Łojasiewicz et singularités à l'infini des polynômes de deux variables complexes*. C. R. Acad. Sci. Paris 311: 429 – 432, (1990)
- [Hör58] Hörmander, L.: *On the division of distributions by polynomials*. Ark. Mat. 3(6): 558 – 568, (1958)
- [Jel06] Jelonek, Z.: *On the Łojasiewicz exponent*. Hokkaido Math. J. 35: 471 – 485, (2006)
- [JKS92] Ji, S., Kollár, J., Shiffman, B.: *A global Łojasiewicz inequality for algebraic varieties*. Trans. Amer. Math. Soc. 329: 813 – 818, (1992)
- [JP00] Jong, T., Pfister, G.: *Local Analytic Geometry*. Advanced Lecture in Mathematics, Springer Fachmedien Wiesbaden, (2000)
- [Kol88] Kollár, J.: *Sharp effective Nullstellensatz*. J. Amer. Math. Soc. 1: 963 – 975, (1988)
- [Kol99] Kollár, J.: *An effective Łojasiewicz inequality for real polynomials*. Period. Math. Hungar. 38: 213 – 221, (1999)

- [Kou76] Kouchnirenko, A. G.: *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*. Invent. Math. 32: 1 – 31, (1976)
- [Kou77] Kouchnirenko, A. G. *Criteria for the existence of a non-degenerate quasi-homogeneous function with given weights*. (In Russian) Usp. Mat Nauk 32: 169-170, (1977)
- [Kra07] Krasinski, T.: *On the Łojasiewicz exponent at infinity of polynomial mappings*. Acta Math. Vietnamica 32: 189 – 203, (2007)
- [Kuch91] Kucharz, W.: *Newton polygons and topological determinacy of analytic germs*. Period Math. Hung. 22: 129 – 132, (1991)
- [Kuo74] Kuo, T. C.: *Computation of Łojasiewicz exponent of $f(x, y)$* . Comment. Math. Helv. 49: 201 – 213, (1974)
- [KL77] Kuo, T.C. and Lu, Y.C.: *On analytic function germs of two complex variables*. Topology 16(4): 299 – 310, (1977)
- [KS14] Kurdyka, K., Spodzieja, S.: *Separation of real algebraic sets and the Łojasiewicz exponent*. Proc. Amer. Math. Soc. 142: 3089 – 3102, (2014)
- [L-JT74] Lejeune-Jalabert, M., Teissier, B.: *Cloture integrale des idéaux et equisingularité*. Centre Math. École Polytechnique, Paris, 1974.
- [Len98] Lenarcik, A.: *On the Łojasiewicz exponent of the gradient of a holomorphic function*. Singularities Symposium- Łojasiewicz 70, Banach Center Publ. 44: 149 – 166, (1998)
- [Len99] Lenarcik, A.: *On the Łojasiewicz exponent of the gradient of a polynomial function*. Ann. Polon. Math. 71: 211 – 239, (1999)
- [L-AMS21] Leyton-Álvarez, M., Mourtada, H., Spivakovsky M.: *Newton non-degenerate μ -constant deformations admit simultaneous embedded resolutions*. Compositio Mathematica 158: 1268 – 1297 (2020)
- [Li81] Lichtin, B.: *Estimation of Łojasiewicz exponent and Newton polygons*. Invent. Math. 64: 417 – 429, (1981)
- [Łoj58] Łojasiewicz S.: *Division d’une distribution par une fonction analytique de variables réelles*. C. R. Acad. Sci. Paris 246: 683 – 686, (1958)
- [Łoj59] Łojasiewicz S.: *Sur le problème de la division*. Studia Math. 18: 87 – 136, (1959)
- [Łoj65] Łojasiewicz S.: *Ensembles semi-analytiques*. preprint IHES, (1965).
- [Łoj91] Łojasiewicz, S.: *Introduction to Complex Analytic Geometry*. Springer Basel AG, (1991)

- [Mas95] Massey, D. B.: *Lê cycles and hypersurface singularities*. Lecture Notes Math. 1615, Springer-Verlag, Berlin, (1995)
- [Mau80] Maurer, J.: *Puiseux expansion for space curves*. Manuscripta Math. 32(1-2): 91 – 100, (1980)
- [Mil68] Milnor, J.: *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Ann. of Math. Stud. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (1968)
- [Mum76] Mumford, D.: *Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties*. Springer-Verlag, (1976).
- [Nem07] Némethi, A.: *Invariants of Newton non-degenerate surface singularities*. Compositio Math. 143: 1003 – 1036, (2007)
- [NZ90] Némethi, A., Zaharia, A.: *On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26: 681 – 689, (1990)
- [Oka79] Oka, M.: *On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary*. J. Math. Soc. Japan, 31(3): 435 – 450, (1979)
- [Oka97] Oka, M.: *Non-degenerate complete intersection singularity*. Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, (1997)
- [Oka18] Oka, M.: *Łojasiewicz exponents of non-degenerate holomorphic and mixed functions*. Kodai Math. J. 41(3): 620 – 651, (2018)
- [PZ97] Păunescu, L., Zaharia, A.: *On the Łojasiewicz exponent at infinity for polynomial functions*. Kodai Math. J. 20: 269 – 274, (1997)
- [Pha11] Pham, T. S.: *The Łojasiewicz exponent of a continuous subanalytic function at an isolated zero*. Proc. Amer. Math. Soc. 139: 1 – 9, (2011)
- [Pha12] Pham, T. S.: *An explicit bound for the Łojasiewicz exponent of real polynomials*. Kodai Math. J. 35: 311 – 319, (2012)
- [Pł84] Płoski, A.: *Sur l'exposant d'une application analytique I*. Bull. Polish Acad. Sci. Math. 32: 669 – 673, (1984)
- [Pł85a] Płoski, A.: *Sur l'exposant d'une application analytique II*. Bull. Polish Acad. Sci. Math. 33: 123 – 127, (1985)
- [Pł85b] Płoski, A.: *On the growth of proper polynomial mappings*. Ann. Polon. Math. 45: 297 – 309, (1985)
- [Pł88] Płoski, A.: *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent*. Banach Cent. Publ. 20 - Singularities, Warsaw 353 – 364, (1988)
- [Pł01] Płoski, A.: *On the maximal polar quotient of an analytic plane curve*. Kodai Math. J. 24: 120 – 133, (2001)

- [Pło10] Płoski, A.: *Semicontinuity of the Łojasiewicz exponent*. Univ. Iagel. Acta Math. 48: 103 – 110, (2010)
- [RRS16] Rodak, T., Różycki, A., Spodzieja, S.: *Multiplicity and semicontinuity of the Łojasiewicz exponent*. Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 64: 55 – 62, (2016)
- [RS09] Rodak, T., Spodzieja, S.: *Effective formulas for the Łojasiewicz exponent at infinity*. J. Pure Appl. Algebra 213: 1816 – 1822, (2009)
- [RS11a] Rodak, T., S. Spodzieja.: *Effective formulas for the local Łojasiewicz exponent*. Math. Z. 268: 37 – 44, (2011)
- [RS11b] Rodak, T., S. Spodzieja.: *Łojasiewicz exponent near the fibre of a mapping*. Proc. Amer. Math. Soc. 139: 1201 – 1213, (2011)
- [Sai71] Saito, K.: *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*. Invent. Math. 14: 123 – 142, (1971)
- [Sch51] Schwartz, L.: *Théorie des distributions, I - II.*, Paris, (1950 – 51)
- [Sel24] Selyanin, F.: *Arnold’s monotonicity problem*. ArXiv e-prints, <https://arxiv.org/abs/2006.11795v2>: 1 – 28, (2024)
- [Shc79] Shcherbak, O. P. *Conditions for the existence of a non-degenerate mapping with a given support*. Func. Anal. Appl 13: 154 – 155, (1979)
- [Spo00] Spodzieja, S.: *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent*. Ann. Polon. Math. 73: 257 – 267, (2000)
- [Spo05] Spodzieja, S.: *The Łojasiewicz exponent of subanalytic sets*. Ann. Polon. Math. 87: 247 – 263, (2005)
- [Tes77] Teissier, B.: *Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d’hypersurfaces*. Invent. Math. 40: 267 – 292, (1977)
- [Two93] Tworzewski, P.: *Isolated intersection multiplicity and regular separation of analytic sets*. Ann. Polon. Math. 58: 213 – 219, (1993)
- [Wal99] Wall, C.T.C.: *Newton polytopes and non-degeneracy*. J. Reine Angew. Math. 509: 1 – 19, (1999)
- [Yos89] Yoshinaga, E.: *Topologically principal part of analytic functions*. Trans. Amer. Math. Soc. 314(2): 803 – 814, (1989)
- [Zah96] Zaharia, J.: *On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary II*. Kodai Math. J. 19: 218 – 233, (1996)