WYDZIAŁ FIZYKI
i INFORMATYKI STOSOWANEJ
Uniwersytet Łódzki

JOANNA PIWNIK

ZAGADNIENIA PROPAGACJI ŚWIATŁA W POLU GRAWITACYJNYM

Praca doktorska wykonana pod kierunkiem
dr hab. Joanny Gonery
w Katedrze Informatyki
Wydziału Fizyki i Informatyki Stosowanej UŁ

Łódź, 2024 r.

PODZIĘKOWANIA

Chciałabym serdecznie podziękować Pani Profesor Joannie Gonerze za umożliwienie mi rozwoju naukowego, cierpliwość, wyrozumiałość i niezawodne wsparcie oraz Panu Profesorowi Piotrowi Kosińskiemu za wsparcie merytoryczne i bezwarunkową życzliwość. Bez Państwa by się nie udało.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Spośród czterech znanych obecnie oddziaływań fundamentalnych, dwa – elektromagnetyczne i grawitacyjne – pojawiają się już na poziomie makroskopowym w postaci pól długozasięgowych, opisywanych w ramach fizyki klasycznej przez elektrodynamikę Maxwella i ogólną teorię względności Einsteina. Co więcej, akceptując pewne, w miarę łagodne założenia, dotyczące kwantowego opisu relatywistycznie niezmienniczych oddziaływań długozasięgowych, można wywnioskować, że są to jedyne oddziaływania, które mogą się pojawić na poziomie klasycznym [1], [2] (należy jednak dodać, że przy założeniu, że czasoprzestrzeń nie jest asymptotycznie płaska, otwierają się dodatkowe możliwości [3]). O ile oddziaływania elektromagnetyczne można uważać za dobrze rozumiane, zarówno na poziomie klasycznym jak i kwantowym (o zadziwiającej zgodności między wynikami doświadczalnymi a przepowiedniami teoretycznymi), to problem relacji między klasycznym opisem pola grawitacyjnego, oferowanym przez ogólną teorię względności, a mechaniką kwantową, pozostaje otwarty. W istocie, jest to jeden z najważniejszych problemów fizyki współczesnej.

Analiza wpływu pola grawitacyjnego na propagację fal elektromagnetycznych ma z kolei wielkie znaczenie w astronomii obserwacyjnej, astrofizyce i kosmologii. Jesteśmy świadkami niezwykłego rozwoju technik obserwacyjnych, pozwalających sięgać bardzo daleko w głąb Wszechświata (i, tym samym, czasu). W szczególności dotyczy to soczewkowania grawitacyjnego [4], [5], [6], ważnego narzędzia astronomii obserwacyjnej, związanego z tak egzotycznymi efektami, jak pierścienie Einsteina i krzyż Einsteina.

Innym ważnym powodem badania propagacji pola elektromagnetycznego w zakrzywionej czasoprzestrzeni jest fakt, że wciąż istnieje wiele otwartych pytań, dotyczących grawitacji i struktury Wszechświata: problem czarnej materii i czarnej energii, rola efektów kwantowych etc. Może się okazać, że nawet już na poziomie klasycznym równania Einsteina powinny zostać zmodyfikowane; zaproponowano różne takie modyfikacje, mniej lub bardziej ad hoc. W celu ich weryfikacji należy uwzględnić ograniczenia wynikające z obserwacji, w szczególności związane z propagacją promieni świetlnych.

W ogólnej teorii względności zachowanie pola elektromagnetycznego w obecności grawitacji łatwo opisać: wystarczy zapisać równania Maxwella w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych i skorzystać z zasady równoważności. Tak jak w przypadku płaskiej czasoprzestrzeni, gdy typowa długość fali elektromagnetycznej jest mała w porównaniu z parametrami o wymiarze długości, charakteryzującymi dany układ, można rozwiązać równania Maxwella w przybliżeniu stacjonarnej fazy, otrzymując opis propagacji w ramach optyki geometrycznej. Kluczowym pojęciem optyki geometrycznej jest promień świetlny i jego trajektoria. W płaskiej czasoprzestrzeni światło rozprzestrzenia się wzdłuż linii prostych, więc zasada równoważności implikuje, że trajektorie promieni świetlnych w zakrzywionej czasoprzestrzeni są geodezyjnymi zerowymi (co, oczywiście, wynika z równań Maxwella w przybliżeniu krótkofalowym).

Alternatywny opis propagacji światła w ramach optyki geometrycznej oferuje zasada najkrótszego czasu Fermata. To zasada wariacyjna dająca bardzo elegancki opis trajektorii promieni świetlnych. Uogólnienie zasady Fermata na przypadek statycznego pola grawitacyjnego podano w pracach Weyla [7] i Pauliego [8] (por. również obszerną monografię [9]). Ogólniejszy przypadek pola stacjonarnego analizowali Quan [10] i Brill [11]. Szczególnie eleganckie wprowadzenie można znaleźć w podręczniku Landaua i Lifszyca [12], gdzie zasadę Fermata wyprowadzono bezpośrednio z zasady równoważności.

Zasada Fermata jest szczególnie użyteczna przy badaniu soczewkowania grawitacyjnego [13], [14], [15]. Można wtedy założyć, że pole grawitacyjne zmienia się w sposób znaczący w skali czasu dużo większej niż czas przejścia promienia świetlnego. Pole grawitacyjne można zatem traktować jako statyczne/stacjonarne.

Może się jednak okazać, że procesy grawitacyjnego ogniskowania są istotne również w przypadkach, gdy pole grawitacyjne nie może być traktowane jako stałe (struny kosmiczne [16], fale grawitacyjne [17]). Warto więc rozważyć uogólnienie zasady Fermata na przypadek dowolnych pól grawitacyjnych. Zostało ono zaproponowane w pracy Kovnera [18] i zanalizowane w publikacjach [19–21]. Interesujące podejście, oparte na zasadzie minimum Pontriagina, zaproponował Frolov [22].

Przedstawiona rozprawa dotyczy sformułowania zasady Fermata dla dowolnych pól grawitacyjnych i wynikających z niej własności i zastosowań. Położono nacisk na fakt, że zasadę Fermata można zanalizować w ramach (uogólnionej) mechaniki analitycznej i teorii drgań nieliniowych. Pozwala to zastosować zaawansowane metody zapożyczone z tych dziedzin do nowego spojrzenia na propagację światła w polu grawitacyjnym. Punktem wyjścia jest obserwacja, że zasadę Fermata w stacjonarnym polu grawitacyjnym możemy sformułować następująco: rozwiązujemy równanie $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 = 0$ ($\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$, zaś σ jest parametrem afinicznym) względem $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}$ i traktujemy otrzymane wyrażenie jako lagranżjan; wynikające zeń równania Lagrange'a wyznaczają trajektorie promieni świetlnych. W takim sformułowaniu zasada Fermata daje się uogólnić na przypadek dowolnego pola grawitacyjnego. Trajektorie promieni świetlnych są rozwiązaniami równań Lagrange'a dla lagranżjanu $L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}$, spełniającymi warunek zerowania się całki „energii", $L = 0$. W rozdziale 2.2 dowodzimy prostego twierdzenia: jeżeli L jest autonomicznym niezdegenerowanym lagranżjanem, będącym jednorodną funkcją drugiego stopnia (w istocie dowolnego stopnia $n \neq 1$) w prędkościach uogólnionych, to rozwiązując równanie $L = E$ względem jednej z prędkości uogólnionych, otrzymujemy lagranżjan opisujący rzut wyjściowych trajektorii (o energii E) na zredukowaną przestrzeń konfiguracyjną, otrzymaną przez pominięcie odpowiedniej współrzędnej uogólnionej. Ten prosty wynik ma jednak swoją cenę: pominięta współrzędna staje się zmienną działania, a otrzymana funkcja Lagrange'a staje się, w ogólności, zależna od działania. Na szczęście standardowa mechanika lagranżowska daje się uogólnić na przypadek lagranżjanów będących funkcjami działania; odpowiedni formalizm nosi nazwę zasady wariacyjny Herglotza i jest dobrze rozpracowany [23–35]. W szczególności, formalizm Herglotza można przedstawić w wersji hamiltonowskiej, udowodnić odpowiedniki pierwszego i drugiego twierdzenia Noether, etc.

Twierdzenie udowodnione w rozdziale 2.2 stosujemy w następnym rozdziale, 2.3, do lagranżjanu opisującego zerowe geodezyjne. W wyniku otrzymujemy funkcję Lagrange'a (w uogólnionym sensie) opisującą trajektorię promieni świetlnych w trójwymiarowej „podprzestrzeni". Współrzędna $x^0 = t$ gra tutaj rolę działania. Pokazujemy, że sformułowanie zaproponowane przez Kovnera [18] wynika bezpośrednio z zasady wariacyjnej Herglotza. Również formalizm Frolova [22] można wywieść z podanego tu sformułowania, gdyż zasada minimum Pontriagina może być powiązana z zasadą wariacyjną Herglotza [28]; nie dyskutujemy jednak tego zagadnienia bardziej szczegółowo.

Lagranżjan otrzymany w wyniku zastosowania powyższej procedury jest (ponieważ $E = 0$) jednorodną funkcją pierwszego stopnia w prędkościach uogólnionych. Odpowiednie równania Lagrange'a są więc niezmiennicze na reparametryzację. Możemy zatem zrezygnować z parametru afinicznego jako parametru ewolucji (którego znalezienie w przypadku geodezyjnych zerowych może być kłopotliwe [36]) i wybrać dowolny inny. W szczególności, wygodnie jest wybrać jedną ze współrzędnych, np. kąt azymutalny ϕ. W ten sposób ilość stopni swobody redukujemy do dwóch.

Ogólność twierdzenia udowodnionego w rozdziale 2.2 pozwala je zastosować również do przypadku geodezyjnych typu czasowego, tzn. propagacji cząstek masywnych ($E \neq 0$). W tym przypadku nie mamy do czynienia z niezmienniczością na reparametryzację; musimy pozostać przy liniowej funkcji czasu własnego. Niemniej, otrzymujemy wersję zasady Fermata dla cząstek masywnych, ponownie równoważną propozycji opisanej w [18].

W rozdziale 2.5 opisujemy formalizm Hamiltona dla sformułowanej poprzednio zasady Fermata. W przypadku propagacji cząstek masywnych jest to bezpośrednie zastosowanie hamiltonowskiej wersji formalizmu Herglotza. Sytuacja komplikuje się w przypadku opisu propagacji światła. Odpowiedni lagranżjan jest zdegenerowany (niezmienniczość na reparametryzację), więc bezpośrednie przejście do formalizmu Hamiltona nie jest możliwe. Są dwie drogi rozwiązania tego problemu. Możemy wybrać konkretny parametr ewolucji (ustalić cechowanie); wtedy przejście do sformułowania hamiltonowskiego jest bezpośrednie. Alternatywnie, możemy próbować uogólnić formalizm Diraca [37] na teorię Herglotza lagranżjanów zależnych od działania. Nie robimy tego w pełnej ogólności, pokazując jedynie, że w przypadku niezmienniczości na reparametryzację wynikający z niej wiąz na pędy można wykorzystać jako hamiltonian, otrzymując poprawne równania ruchu.

W dwóch innych rozdziałach pierwszej części, 2.6 i 2.8, analizujemy równania geodezyjnych wynikające z zasady Fermata i przyjęcia kąta azymutalnego jako parametru ewolucji.

W końcu, w rozdziale 2.7 rozważamy propagację światła w metryce Schwarzschilda–de Sittera, w tzw. współrzędnych współporuszających się. Ze względu na symetrię sferyczną możemy, bez zmniejszenia ogólności, położyć $\theta = \frac{\pi}{2}$, zaś wykorzystując niezmienniczość na reparametryzację wybrać kąt azymutalny ϕ jako parametr ewolucji. Pozostaje więc tylko jeden stopień swobody, r. Metryka zależy jawnie od czasu, zatem musimy zastosować pełny formalizm Herglotza. W standardowym formalizmie mechaniki analitycznej efektywne całkowanie równań ruchu umożliwia istnienie całek ruchu. Twierdzenie Noether, uogólnione na formalizm Herglotza, prowadzi do całek ruchu, które są nielokalne w czasie. Na szczęście, czynnik nielokalny ma charakter uniwersalny, niezależny od konkretnej postaci transformacji symetrii. Dzięki temu stosunek dwóch całek noetherowskich, wynikających z dwóch niezależnych transformacji symetrii, jest zwykłą lokalną stałą ruchu. W rozdziale 2.7 pokazujemy, jak można wykorzystać ten pomysł do efektywnego całkowania równań opisujących propagację promieni świetlnych w metryce Schwarzschilda–de Sittera. Należy jednak podkreślić, że ten przykład zastosowania pełnego formalizmu Herglotza nie jest najogólniejszy, gdyż można w metryce Schwarzschilda–de Sittera wprowadzić niezależny od czasu układ współrzędnych.

Trzeci rozdział rozprawy jest poświęcony opisowi propagacji światła przy dużej wartości parametru zderzenia. Równania wyznaczające trajektorie promieni świetlnych pokrywają się wtedy z równaniami opisującymi małe drgania układów nieliniowych (lub przechodzą w nie asymptotycznie); w przypadku metryk o niższej symetrii są to układy równań opisujących oscylacje nieliniowe. Można wtedy zastosować dobrze znane metody teorii drgań nieliniowych. Jednym z użytecznych narzędzi tej teorii jest formalizm Lindstedta–Poincarégo. Pozwala on efektywnie sumować podszeregi szeregu perturbacyjnego w (małej) amplitudzie drgań, tak by dostać sukcesywne przybliżenia dokładnego rozwiązania, jednostajne w zmiennej opisującej ewolucję. Kolejne wyrazy tak otrzymanego szeregu przybliżeń są kombinacjami liniowymi funkcji trygonometrycznych wielokrotności częstości podstawowej, wyznaczanej perturbacyjnie rząd po rzędzie z warunku, by w kolejnych rzędach nie pojawiały się człony rezonansowe. Wynikający stąd szereg nie tylko prowadzi do przybliżeń jednostajnych w zmiennej niezależnej, ale również poprawnie odtwarza jakościowe cechy dokładnego rozwiązania, takie jak periodyczność. Przeciwnie, naiwny szereg rachunku zaburzeń jest kombinacją iloczynów wielomianów w zmiennej niezależnej (stopnia równego, z grubsza, połowie rzędu danego członu) i funkcji trygonometrycznych od wielokrotności częstości drgań niezaburzonych; jako taki, stanowi dużo gorsze narzędzie analizy drgań nieliniowych.

W rozdziale trzecim stosujemy formalizm Lindstedta–Poincarégo do analizy geodezyjnych w obszarze asymptotycznym metryk Schwarzschilda, Reissnera–Nördstroma oraz, w płaszczyźnie równikowej, Kerra. Jako przykład zastosowania wyliczamy kąty odchylenia promieni świetlnych w tych metrykach w kolejnych rzędach rozwinięcia w odwrotności niezmienniczego parametru zderzenia. Zastosowana metoda wymaga tylko operacji algebraicznych, bez konieczności rozważania funkcji eliptycznych i ich rozwinięć w szeregi potęgowe czy szeregi Fouriera. Oczywiście, takie same wyniki dla kąta odchylenia można otrzymać stosując naiwny rachunek zaburzeń [38], [39]; rozwinięcia wielkości niezależnych od zmiennej niezależnej, otrzymane różnymi metodami muszą się pokrywać. Metoda oparta na formalizmie Lindstedta–Poincarégo jest jednak efektywniejsza w wyższych rzędach rozwinięcia; poza tym można ją wykorzystać do otrzymania dokładniejszych wyrażeń dla kąta odchylenia, będących częściowymi sumami podszeregów szeregu perturbacyjnego.

Rozdział czwarty rozprawy dotyczy problemu całkowalności równań trajektorii promieni świetlnych na przykładzie metryki Kerra. Przy opisie geodezyjnych zerowych w tej metryce za pomocą lagranżjanu $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}$ mamy następujące oczywiste całki ruchu: $L(=0)$, wynikającą z autonomiczności dynamiki oraz p_t i p_ϕ, będące konsekwencją cykliczności współrzędnych

t i ϕ. Potrzebna jest jeszcze jedna całka - jest to tzw. stała Cartera [40]. Jeżeli oprzemy opis trajektorii promieni świetlnych na zasadzie Fermata, mamy do czynienia z dwuwymiarowym (r i θ) układem dynamicznym. Jego całkowalność wymaga istnienia dwóch całek ruchu; jedną z nich jest hamiltonian $\widetilde{\mathcal{H}}$. Druga całka powinna być odpowiednikiem stałej Cartera. Z postaci $\widetilde{\mathcal{H}}$ trudno od razu wnioskować, że dodatkowa całka istnieje: $\widetilde{\mathcal{H}}$ nie ma standardowej formy dopuszczającej bezpośrednią separację zmiennych w równaniu Hamiltona–Jacobiego. Aby uzyskać wgląd w mechanizm separacji zmiennych wykorzystamy formalizm opisany w [41] i będący uogólnieniem zaproponowanej przez Hietarintę i in. [42] metamorfozy stałej sprzężenia. Istotą tej metody jest obserwacja, że stałe sprzężenia, wchodzące do definicji wyjściowego hamiltonianu, można uzależnić od całek ruchu danego układu, w szczególności od samego hamiltonianu. W ten sposób, rozwiązując uwikłane równanie, dostajemy nowy hamiltonian, taki że (niesparametryzowane) trajektorie w przestrzeni fazowej wyjściowego i końcowego hamiltonianu pokrywają się; istnieje też jednoznaczna odpowiedniość między symetriami i całkami ruchu obu układów. Stosując ten formalizm do hamiltonianu związanego z zasadą Fermata otrzymujemy elegancki hamiltonian kwadratowy w pędach uogólnionych i będący funkcją wymierną współrzędnych, o strukturze dopuszczającej separację zmiennych w równaniu Hamiltona–Jacobiego. W ten sposób otrzymujemy drugą całkę ruchu, odpowiednik stałej Cartera, w formalizmie związanym z zasadą Fermata. W rozdziałach 4.3 i 4.4 pokazujemy, że otrzymana nowa forma dynamiki prowadzi do poprawnych wyników, odpowiednio w granicy Schwarzschilda i dla ruchu w płaszczyźnie równikowej metryki Kerra. W końcu, w rozdziale 4.5 krótko dyskutujemy problem dokładnego i przybliżonego całkowania naszych równań wyznaczających trajektorie promieni świetlnych w czasoprzestrzeni Kerra. Pokazujemy, jak przez wprowadzenie odpowiednika czasu Mino [43] (który okazuje się blisko spokrewniony z parametrem ewolucji, pojawiającym się w dość naturalny sposób w formalizmie wprowadzonym w [41]) można dokonać całkowitej separacji szukanych wielkości. Otrzymujemy układ trzech oddzielnych równań dla θ, r oraz ϕ w funkcji „czasu Mino". Dopuszczają one separację zmiennych i rozwiązania w terminach funkcji eliptycznych. Są również wygodnym punktem wyjścia do obliczeń przybliżonych, opartych na rozwinięciu potęgowym w odwrotności parametru zderzenia.

Krótka część piąta jest poświęcona zastosowaniu zasady Fermata do analizy zamkniętych trajektorii świetlnych. Podajemy prosty dowód faktu, że kołowa trajektoria świetlna w płaszczyźnie równikowej metryki Kerra odpowiada minimum czasu obiegu, mierzonego przez obserwatora w nieskończoności, dla wszystkich krzywych zerowych, których rzut na płaszczyznę równikową jest okręgiem o środku w początku układu.

W końcu, część szósta zawiera krótkie podsumowanie.

Uzupełnieniem rozprawy jest kilka dodatków. Część z nich zawiera informacje literaturowe (metoda Lindstedta–Poincarégo, inne sformułowanie zasady Fermata, podstawowe informacje o zasadzie wariacyjnej Herglotza). Dodatek poświęcony formalizmowi Herglotza obejmuje zmodyfikowane wyprowadzenia niektórych własności tego formalizmu, bliższe duchem klasycznym podręcznikom mechaniki analitycznej; podajemy też nieco ogólniejsze sformułowanie twierdzenia Noether i jego wersję hamiltonowską. Pozostałe dodatki zawierają obliczenia i rozważania pominięte w głównym tekście rozprawy.

Rozprawa oparta jest na następujących pracach:

1. J. Gonera, P. Kosiński, J. Piwnik, *Fermat's principle in constant gravitational field*, Int. Journ. Mod. Phys., D30 (2021), 2150094;

2. J. Piwnik, J. Gonera, P. Kosiński, *Fermat's principle in general relativity via Herglotz variational formalism*, Nucl.Phys.B1010 (2025), 116744;

3. J. Piwnik, J. Gonera, P. Kosiński, *Fermat's principle and weak deflection angle from Lindstedt–Poincaré method*, arXiv: 2405.14462;

4. J. Piwnik, J. Gonera, C. Gonera, P. Kosiński, *Integrable dynamics from Fermat's principle*, arXiv: 2409.11896.

Rozdział 2

Zasada Fermata dla propagacji światła w dowolnym polu grawitacyjnym

2.1 Propagacja światła w stałym polu grawitacyjnym

Zgodnie z ogólną teorią względności pole grawitacyjne jest związane z geometrią czasoprzestrzeni, zdefiniowaną przez element długości

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu. \tag{2.1}$$

Pole grawitacyjne nazywamy stałym, jeżeli można wybrać taki układ współrzędnych, by składowe $g_{\mu\nu}(x)$ tensora metrycznego nie zależały od współrzędnej czasowej x^0. Jeżeli dodatkowo $g_{0i}(x) = 0$ dla $i = 1, 2, 3$, pole nazywamy statycznym; w przeciwnym przypadku mówimy o polu stacjonarnym.

Rozchodzenie się światła w polu grawitacyjnym opisane jest przez rozwiązania równań Maxwella w zakrzywionej czasoprzestrzeni. W przybliżeniu małej długości fal można odwołać się do optyki geometrycznej z jej podstawowym pojęciem promieni świetlnych. W płaskiej czasoprzestrzeni trajektorie promieni świetlnych są wyznaczone przez zasadę Fermata. Jej uogólnienie na stałe pola grawitacyjne jest stosunkowo proste. Zasadę Fermata dla pól statycznych przedyskutowano w wielu pracach (np. [7–9]); podano również jej rozszerzenie na przypadek stacjonarny, [10–12].

Eleganckie wyprowadzenie zasady Fermata dla stałych pól grawitacyjnych (statycznych i stacjonarnych) podali Landau i Lifszyc [12]. Punktem wyjścia jest zasada Fermata dla płaskiej czasoprzestrzeni,

$$\delta \int k_i \, \mathrm{d}x^i = 0; \tag{2.2}$$

tutaj k_i są (kowariantnymi) składowymi wektora falowego, a całkowanie przebiega wzdłuż trajektorii promienia świetlnego. Zasada równoważności pozwala wywnioskować, że (2.2) obowiązuje również w przypadku zakrzywionej czasoprzestrzeni; wyrażenie podcałkowe należy przy tym wyrazić przez stałą (mierzoną w jednostkach czasu x^0 wzdłuż promienia) częstość.

W rezultacie otrzymujemy następującą postać zasady Fermata:

$$\delta \int \left(\frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{g_{00}}} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \, \mathrm{d}x^i \right) = 0, \tag{2.3}$$

gdzie

$$\mathrm{d}l^2 \equiv \gamma_{ij} \, \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^j \equiv \left(-g_{ij} + \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \right) \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^j \tag{2.4}$$

jest przestrzennym elementem długości.

Alternatywnym sposobem wyprowadzenia równania dla trajektorii promienia światła w polu grawitacyjnym jest zastosowanie zasady równoważności do następującej własności promieni świetlnych w płaskiej czasoprzestrzeni: (cztero)wektor falowy jest stały wzdłuż trajektorii [12]. W rezultacie otrzymujemy równanie geodezyjnej

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\sigma} = 0, \tag{2.5}$$

gdzie σ jest odpowiednio dobranym parametrem (tzw. parametr afiniczny). Równanie (2.5) można otrzymać z zasady wariacyjnej

$$\delta \int g_{\mu\nu}(x) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma} \, \mathrm{d}\sigma = 0. \tag{2.6}$$

Do równania (2.5) należy dodać warunek

$$g_{\mu\nu}(x) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{2.7}$$

na jego całkę, wynikający z faktu, że czterowektor falowy jest wektorem zerowym. Opis oparty na równaniach (2.6) i (2.7) prowadzi do tych samych trajektorii, co zasada Fermata (2.2). Z drugiej strony, w przeciwieństwie do tej ostatniej, nie wymaga założenia o stałości pola grawitacyjnego. Nasuwa się pytanie, czy mógłby służyć za punkt wyjścia do sformułowania zasady Fermata dla przypadku dowolnego pola grawitacyjnego.

Zauważmy, że rozwiązując równanie

$$\mathrm{d}s^2 = 0 \tag{2.8}$$

względem $\mathrm{d}x^0$ otrzymujemy

$$\mathrm{d}x^0 = -\frac{g_{0i}\,\mathrm{d}x^i}{g_{00}} \pm \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{2.9}$$

Wybierając w równaniu (2.9) górny znak widzimy, że zasadę Fermata (2.2) można przedstawić w postaci

$$\delta \int \mathrm{d}x^0 = 0, \tag{2.10}$$

przy czym wybieramy kierunek propagacji w przyszłość według wskazań zegarów zsynchronizowanych wzdłuż trajektorii (patrz niżej). Zasadę wariacyjną opisaną równaniami (2.2) lub (2.10) można przestawić w formie lagranżowskiej

$$\delta \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{2.11}$$

gdzie funkcja Lagrange'a ma postać

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}\left(\vec{x}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma}\right) = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\sigma} - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}, \tag{2.12}$$

a $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$. Zauważmy, że dzięki założeniu o stałości pola grawitacyjnego, funkcja $\mathcal{L}\left(\vec{x}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma}\right)$ nie zależy od x^0, co umożliwia zastosowanie standardowego formalizmu Lagrange'a.

Zasada wariacyjna (2.11) implikuje równania Lagrange'a determinujące trajektorię promieni światła:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \quad \dot{x}^i \equiv \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}. \tag{2.13}$$

Takie sformułowanie zasady Fermata ma dwie ważne własności:

i) równanie (2.9) ma dwa rozwiązania. Do wyznaczenia przestrzennej trajektorii potrzebne są warunki początkowe: położenie początkowe i wartość wektora stycznego do trajektorii w punkcie początkowym. Z drugiej strony, rozwiązanie równania (2.5) jest zadane przez ustalenie punktu początkowego i zerowego czterowektora stycznego do trajektorii w czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Mając wektor styczny do trajektorii przestrzennej możemy wyznaczyć składową zerową czterowektora stycznego, korzystając z równania $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 = 0$. Równanie to ma dwa rozwiązania dla $\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\sigma}$, otrzymujemy więc dwie geodezyjne, których rzuty na współrzędne x^1, x^2, x^3 zadane są przez wyjściowe warunki początkowe dla trajektorii trójwymiarowych i równania Lagrange'a generowane przez lagranżjany

$$\mathcal{L}_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\sigma} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}. \tag{2.14}$$

Łatwo zrozumieć, jaki sens ma wybór konkretnego znaku w równaniu (2.14). Przepisując równanie (2.9) w postaci

$$\mathrm{d}x^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}} \mathrm{d}x^i = \pm \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{g_{00}}} \tag{2.15}$$

i wykorzystując wyniki dotyczące synchronizacji zegarów w ogólnej teorii względności [12] wnioskujemy, że wybór znaku plus (minus) oznacza wybór geodezyjnej propagującej się w przyszłość (przeszłość) według wskazań zegarów zsynchronizowanych wzdłuż geodezyjnej.

ii) Lagranżjan (2.12) jest jednorodną funkcją prędkości $\dot{x}^i \equiv \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}$ pierwszego stopnia; oznacza to, że σ może być dowolną parametryzacją trajektorii, niekoniecznie wyjściowym parametrem afinicznym, wchodzącym do czterowymiarowej zasady wariacyjnej (2.6). W szczególności, często wygodnie jest wybrać (przynajmniej lokalnie) za σ jedną ze współrzędnych x^i.

Zauważmy, że z równań (2.10)-(2.12) wynika, że współrzędna czasowa x^0 pełni rolę działania w naszym formalizmie Lagrange'a.

W przypadku dowolnego pola grawitacyjnego równanie (2.12) przyjęłoby postać

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\sigma} \equiv \mathcal{L}\left(\vec{x}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma}, x^0\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\sigma} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}. \tag{2.16}$$

Porównanie równania (2.16) z równaniem (A.7) z Dodatku A sugeruje, że zasada Fermata dla dowolnego pola grawitacyjnego może być sformułowana w ramach uogólnienia formalizmu Lagrange'a podanego przez Herglotza [23]. Punkt wyjścia do pokazania, że tak w istocie jest, stanowi zasada wariacyjna dla geodezyjnych w czasoprzestrzeni. Równanie (2.6) można przepisać w postaci

$$\delta \int L \, \mathrm{d}\sigma = 0, \tag{2.17}$$

gdzie

$$L \equiv L\left(x^\mu, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma}; \tag{2.18}$$

równanie (2.17) należy uzupełnić warunkiem (2.7), specyfikującym geodezyjne zerowe. Przypomnijmy, że w równaniu (2.17) σ musi być parametrem afinicznym (zdefiniowanym z dokładnością do transformacji afinicznej). Należy więc udowodnić, że zasada wariacyjna (2.17) pozwala sformułować zasadę Fermata w ramach formalizmu Herglotza. W następnym rozdziale udowodnimy nieco ogólniejsze stwierdzenie.

2.2 Zredukowana dynamika dla jednorodnych lagranżjanów

Rozważmy układ lagranżowski o $n+1$ stopniach swobody i współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{q} \equiv \left(q^0, q^1, ..., q^n\right) \equiv (q^\mu), \quad \mu = 0, 1, 2, ..., n. \tag{2.19}$$

Załóżmy, że spełnione są następujące warunki:

i) lagranżjan L nie zależy jawnie od parametru ewolucji σ („czasu");

ii) L jest niezdegenerowany:

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\mu \partial \dot{q}^\nu}\right] \neq 0, \quad \dot{q}^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}q^\mu}{\mathrm{d}\sigma}; \tag{2.20}$$

iii) L jest jednorodną funkcją prędkości uogólnionych $\dot{q}^\mu$ stopnia 2.,

$$\dot{q}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} = 2L. \tag{2.21}$$

Najprostszym i jednocześnie najważniejszym przykładem takiego lagranżjanu jest

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\mathbf{q})\, \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu, \quad \det\left[q_{\mu\nu}(\mathbf{q})\right] \neq 0. \tag{2.22}$$

Równania Lagrange'a, wyznaczające trajektorie, mają postać

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, ..., n. \tag{2.23}$$

Z i) i iii) wynika, że „energia"

$$E \equiv E\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right) = \dot{q}^{\mu}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}} - L = 2L - L = L \tag{2.24}$$

jest całką ruchu. Ustalmy wartość energii E i rozważmy podzbiór trajektorii odpowiadających tej wartości E,

$$L\left(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\right) = E. \tag{2.25}$$

Z założenia, że L jest niezdegenerowany wynika, że $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0} \not\equiv 0$. Zatem równanie (2.25) może być, przynajmniej lokalnie, rozwiązane względem $\dot{q}_0$,

$$\dot{q}^0 = \dot{q}^0\left(q^0,\vec{q},\dot{\vec{q}};E\right), \quad \vec{q} \equiv \left(q^1,...,q^n\right) \equiv (q^i). \tag{2.26}$$

Zachodzi więc tożsamość:

$$L\left(q^0,\vec{q},\dot{q}^0\left(q^0,\vec{q},\dot{\vec{q}},E\right),\dot{\vec{q}}\right) \equiv E. \tag{2.27}$$

Różniczkując tożsamość (2.27) względem q^i, q^0 oraz $\dot{q}^i$, otrzymujemy następujące relacje:

$$\frac{\partial \dot{q}^0}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0}\right)^{-1} \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial \dot{q}^0}{\partial \dot{q}^i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0}\right)^{-1} \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \dot{q}^0}{\partial q^0} = -\frac{\partial L}{\partial q^0}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0}\right)^{-1}. \tag{2.30}$$

Potraktujmy współrzędną uogólnioną q^0 jak nową zmienną działania

$$q^0 = S, \tag{2.31}$$

pozostawiając niezmienioną interpretację pozostałych współrzędnych uogólnionych. Zdefiniujmy też nowy, zależny od działania S (oraz ustalonej wyjściowej energii E), lagranżjan

$$\mathcal{L}\left(S,\vec{q},\dot{\vec{q}};E\right) \equiv \dot{q}^0\left(q^0,\vec{q},\dot{\vec{q}};E\right). \tag{2.32}$$

Równania (2.26)-(2.32) implikują następujące relacje:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} &= \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)& \\ -\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0}\right)^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^0}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^0}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}&.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Z równań (2.26), (2.32) i (2.33) wynika, że jeżeli spełnione są wyjściowe równania Lagrange'a (2.23), to zachodzą również relacje:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\sigma} = \mathcal{L}\left(S, \vec{q}, \dot{\vec{q}}; E\right) \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = 0. \tag{2.35}$$

Porównując równania (2.34) i (2.35) z (A.9) wnioskujemy, że rzuty wyjściowych trajektorii, odpowiadających ustalonej energii E, na współrzędne $q^1, ...,$ q^n, są opisane przez zasadę wariacyjną Herglotza dla lagranżjanu $\mathcal{L}$, danego równaniem (2.32).

Odwrotnie, załóżmy że równania (2.34), (2.35) dopuszczają jednoznaczne rozwiązanie, spełniające warunki początkowe

$$q^i(\sigma_0) = q^i_0 \tag{2.36}$$

$$\dot{q}^i(\sigma_0) = \dot{q}^i_0 \tag{2.37}$$

$$S(\sigma_0) = S_0. \tag{2.38}$$

Uzupełniając warunki początkowe przez

$$\dot{q}^0(\sigma_0) \equiv \left.\frac{\mathrm{d}q^0(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0} = \mathcal{L}\left(S_0, \vec{q_0}, \dot{\vec{q_0}}; E\right), \tag{2.39}$$

możemy znaleźć (jednoznaczne wobec warunku (ii)) rozwiązanie równań Lagrange'a (2.23). Rzut tak otrzymanych trajektorii na współrzędne $q^1, ..., q^n$ daje rozwiązanie, z którego wystartowaliśmy.

2.3 Propagacja światła w dowolnym polu grawitacyjnym

Zastosujmy rozumowanie z poprzedniego podrozdziału do lagranżjanu (2.18). Opisana powyżej procedura prowadzi do lagranżjanu (2.12); tym razem jednak zależy on również od zmiennej x^0:

$$\mathcal{L}\left(x^0, \vec{x}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\sigma} - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}. \tag{2.40}$$

Równania (2.34), (2.35) przyjmują odpowiednio postać:

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\sigma} = \mathcal{L}\left(x^0, \vec{x}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma}\right) \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = 0. \tag{2.42}$$

Widzimy więc, że do sformułowania uogólnionej zasady Fermata możemy zastosować formalizm Herglotza, identyfikując współrzędną x^0 ze zmienną działania:

$$S = x^0. \tag{2.43}$$

Do uogólnionej zasady Fermata stosują się podobne uwagi jak w przypadku zasady Fermata dla stałych pól grawitacyjnych:

i) równanie $\mathrm{d}s^2 = 0$ definiuje dwa lagranżjany:

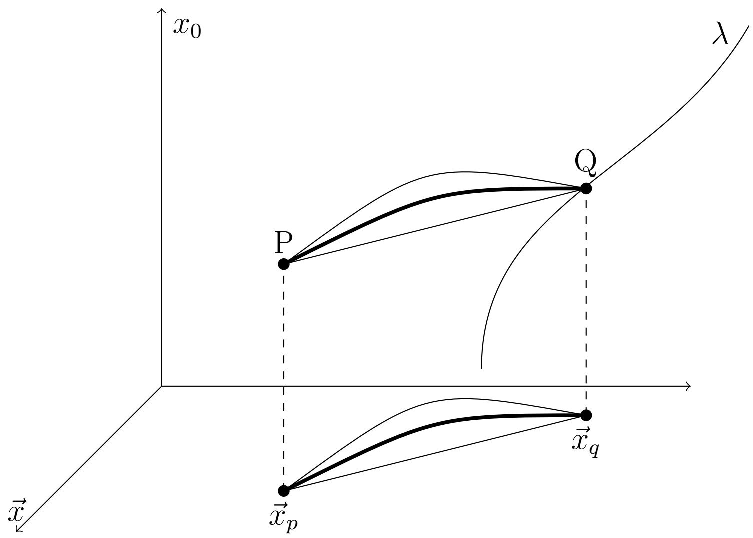
$$\mathcal{L}_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\sigma} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}. \tag{2.44}$$

Przy zadanych warunkach początkowych dla trajektorii przestrzennej (początkowy punkt w czasoprzestrzeni i składowe przestrzenne wektora stycznego w punkcie początkowym), dostajemy dwie geodezyjne zerowe, odpowiadające dwóm możliwym wyborom składowej czasowej wektora stycznego do geodezyjnej w punkcie początkowym. Są one opisane przez równania Lagrange'a dla lagranżjanów $\mathcal{L}_{\pm}$ i odpowiadają propagacji w przyszłość lub w przeszłość według zegarów zsynchronizowanych wzdłuż geodezyjnej;

ii) lagranżjan (2.40) jest jednorodną funkcją pierwszego stopnia prędkości $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}$. Wobec tego parametr σ, pierwotnie afiniczny wzdłuż geodezyjnej, można zastąpić dowolną parametryzacją trajektorii. W szczególności również w ogólnym przypadku można, przynajmniej lokalnie, wybrać jako parametr jedną ze składowych x^i. Co więcej, jest to wygodne, bo w przypadku czasoprzestrzeni niewykazujących symetrii, jawna charakteryzacja parametru afinicznego geodezyjnych zerowych jest nietrywialnym problemem [36]. Z drugiej strony, jeżeli x^i nie jest zmienną cykliczną, otrzymany lagranżjan zależy od parametru ewolucji.

Zasada Fermata dla dowolnych pól grawitacyjnych została podana w kilku pracach [18–21]. Można ją sformułować następująco [18, 19]:
Załóżmy, że światło emitowane jest z punktu P czasoprzestrzeni i dociera do obserwatora O w punkcie Q na jego linii świata λ (Rys. 2.1). Oznaczmy przez N zbiór krzywych zerowych wychodzących z P i docierających do λ. Trajektoria promienia świetlnego wyznaczona jest przez warunek, że jest ona stacjonarna w N.

Tak sformułowana zasada Fermata ma następujące znaczenie. Wybierzmy dowolną parametryzację τ linii świata obserwatora. Każdej krzywej należącej do N odpowiada wartość parametru τ punktu przecięcia tej krzywej z λ. Rzeczywista trajektoria promienia świetlnego odpowiada krzywej, dla której wartość τ jest stacjonarna ze względu na wariacje krzywej należące do zbioru N. Innymi słowy, krzywe zerowe z infinitezymalnego otoczenia rzeczywistej trajektorii, wychodzące z punktu P i przecinające λ, przecinają ją w tym samym punkcie Q.



Rysunek 2.1: Geometryczna ilustracja uogólnionej zasady Fermata.

Zredukowane krzywe, odpowiadające krzywym z infinitezymalnego sąsiedztwa zredukowanej trajektorii promienia świetlnego, zaczynają się w punkcie $\vec{x}_p$ i kończą w $\vec{x}_q$.

Odwrotnie, rozważmy zredukowane krzywe z infinitezymalnego sąsiedztwa zredukowanej trajektorii promienia świetlnego. Odpowiadają im krzywe zerowe, przechodzące przez punkt P. Zgodnie z (2.43) współrzędną x^0 identyfikujemy ze zmienną działania. Zasada wariacyjna Herglotza implikuje, że wartość x^0 punktu końcowego, leżącego na linii świata $\vec{x} = \vec{x}_q$, jest stacjonarna. Oznacza to, że krzywe zerowe z infinitezymalnego otoczenia trajektorii rzeczywistej, przecinające linię świata $\vec{x} = \vec{x}_q$, kończą się w punkcie Q. Są to te same krzywe, co opisane powyżej w omówieniu uogólnionej zasady Fermata w wersji Kovnera [18] (gdyż wyznaczają je jednoznacznie trajektorie zredukowane i warunek propagacji w przód w czasie).

Istnieje jeszcze inne podejście do zasady Fermata, oparte na zasadzie minimum Pontriagina [22]. Zasada Pontriagina związana jest z formalizmem Herglotza [27], tak że wyniki otrzymane w pracy [22] można otrzymać w ramach prezentowanego tu formalizmu.

2.4 Zasada Fermata dla cząstek masywnych

Odpowiednik zasady Fermata można również sformułować dla cząstek masywnych [18, 19]. Formalizm opisany w podrozdziale 2.2 jest dostatecznie ogólny, by objąć również ten przypadek. Trajektorie czasoprzestrzenne cząstek masywnych są rozwiązaniami równań Lagrange'a dla lagranżjanu (2.18) przy warunku

$$g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\sigma} > 0. \tag{2.45}$$

W tym przypadku parametr afiniczny σ jest liniową funkcją s; kładąc $\sigma = s$ mamy

$$g_{\mu\nu}(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = 1. \tag{2.46}$$

Odpowiednia funkcja Lagrange'a ma postać

$$\mathcal{L}\left(\vec{x}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}, x^0\right) = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}s}\right)^2 + 1}}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{2.47}$$

Tak jak w przypadku bezmasowym, wybór znaku odpowiada propagacji w przód lub w tył w czasie. Z drugiej strony, w przeciwieństwie do geodezyjnych zerowych, nie mamy tu do czynienia z niezmienniczością na reparametryzację.

2.5 Formalizm Hamiltona

Zasada wariacyjna Herglotza dopuszcza sformułowanie hamiltonowskie, opisane w Dodatku A. Rozważmy najpierw przypadek propagacji cząstki masywnej, który jest prostszy, gdyż przy braku niezmienniczości na transformacje reparametryzacji funkcja Lagrange'a $\mathcal{L}_\pm$ jest niezdegenerowana. Z równania (2.47) (przy wyborze $\mathcal{L}_+$) dostajemy

$$p_i \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\right)} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} + \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\gamma_{ij}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}s}\right)^2 + 1}}, \tag{2.48}$$

skąd

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \gamma^{ij}\Pi_j\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - g_{00}\Pi^2}} = -g^{ij}\Pi_j\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - g_{00}\Pi^2}}, \tag{2.49}$$

gdzie

$$\Pi_i \equiv p_i + \frac{g_{0i}}{g_{00}} \tag{2.50}$$

$$\Pi^2 \equiv \gamma^{ij}\Pi_i\Pi_j = -g^{ij}\Pi_i\Pi_j, \tag{2.51}$$

(gdyż $\gamma^{ij} = -g^{ij}$ [12]).
Korzystając z (A.29) możemy napisać

$$\mathcal{H} = p_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} - \mathcal{L} = -\frac{\sqrt{1 - g_{00}\Pi^2}}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{2.52}$$

Zgodnie z (A.30) równania opisujące trajektorię cząstki mają postać

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \tag{2.53}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} - p_i \frac{\partial H}{\partial x^0} \tag{2.54}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \mathcal{H}. \tag{2.55}$$

Przypadek trajektorii zerowych jest bardziej złożony. Lagranżjan (2.40) (ponownie wybieramy $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+$) z równaniami (2.41) i (2.42) definiują dynamikę niezmienniczą na redefinicję parametru ewolucji (por. Dodatek C). W rezultacie mamy do czynienia ze zdegenerowaną funkcją Lagrange'a. Równanie (2.48), definiujące pęd uogólniony, przybiera postać

$$p_i = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} + \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\gamma_{ij} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\sigma}}{\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\sigma}}, \tag{2.56}$$

skąd widać, że nie można wyrazić prędkości $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}$ przez pęd p_i. Równanie (2.56) implikuje bowiem następujący wiąz:

$$g_{00}\gamma^{ij}\Pi_i\Pi_j - 1 = 0 \tag{2.57}$$

Niezmienniczość na reparametryzację prowadzi do znikania kanonicznego hamiltonianu

$$\mathcal{H} \equiv \dot{x}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \mathcal{L} \equiv 0. \tag{2.58}$$

Konstrukcja formalizmu hamiltonowskiego wymaga rozszerzenia teorii Diraca [37] na przypadek formalizmu wariacyjnego Herglotza. Opis tego formalizmu (szczególnie w wersji hamiltonowskiej), zamieszczony w Dodatku A, sugeruje, że teoria Diraca może być uogólniona na lagranżjany zależne od działania. W naszym kontekście mamy do czynienia z pojedynczym więzem (2.57), który, jako jedyny, jest oczywiście pierwszego rodzaju. Zakładając, że w tym przypadku prosty przepis na konstrukcję formalizmu Hamiltona dla teorii z więzami jest poprawny, wnioskujemy, że funkcja Hamiltona jest proporcjonalna do lewej strony równania (2.57) i ma postać:

$$\mathcal{H} = \mu \left(g_{00}\gamma^{ij}\Pi_i\Pi_j - 1 \right), \tag{2.59}$$

gdzie μ jest odpowiednim mnożnikiem Lagrange'a. Równania (2.53)-(2.55) przyjmują postać

$$\dot{x}^i = 2\mu\; g_{00}\gamma^{ij}\Pi_j \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_i = &- \mu\; \partial_i \left(g_{00}\gamma^{kl}\right)\Pi_k\Pi_l - 2\mu\; g_{00}\gamma^{kl}\partial_i g_k\Pi_l \\ &- \mu\left(\Pi_i - g_i\right)\partial_0\left(g_{00}\gamma^{kl}\right)\Pi_k\Pi_l \\ &- 2\mu\left(\Pi_i - g_i\right)g_{00}\gamma^{kl}\;\partial_0 g_k\Pi_l\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\dot{x}^0 = \mu\left(g_{00}\gamma^{kl}\left(p_k - g_k\right)\Pi_l + 1\right), \tag{2.62}$$

gdzie

$$g_i \equiv \frac{g_{0i}}{g_{00}}. \tag{2.63}$$

W szczególności, równanie (2.60) daje

$$\Pi_i = \frac{\gamma_{ij}\dot{x}^j}{2\mu g_{00}}. \tag{2.64}$$

Stąd i z równania (2.57) dostajemy

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{g_{00}}} \tag{2.65}$$

(drugie rozwiązanie, różniące się znakiem, prowadzi do tych samych wniosków).

Różniczkując po σ równanie (2.60) i wykorzystując relacje (2.61), (2.62) i (2.65) wnioskujemy, że współrzędne x^i spełniają równania różniczkowe drugiego rzędu, równoważne równaniom Herglotza

$$\dot{x}^0 = \mathcal{L} \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^0}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} = 0. \tag{2.67}$$

Nieco skomplikowane rachunki opisane są w Dodatku C. Konkludując, widzimy, że formalizm Diraca daje się w bezpośredni sposób uogólnić, przynajmniej w przypadku teorii niezmienniczych na reparametryzację, na przypadek lagranżjanów zależnych od działania.

Alternatywne podejście do formalizmu hamiltonowskiego polega na ustaleniu cechowania. Szczególnie wygodny warunek cechowania otrzymujemy wybierając za parametr ewolucji σ jedną ze współrzędnych, np. $\sigma = x^3$. W ogólności, taki wybór możliwy jest tylko lokalnie. W tym cechowaniu lagranżjan $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+$ przyjmuje postać (por. Dodatek C)

$$\mathcal{L} = -\frac{g_{0a}}{g_{00}}\dot{x}^a - \frac{g_{03}}{g_{00}} + \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{\gamma_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b + 2\gamma_{a3}\dot{x}^a + \gamma_{33}}, \tag{2.68}$$

przy czym sumowanie po a, b przebiega od 1 do 2. Równania Lagrange'a można napisać w formie:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} = 0, \qquad a = 1, 2 \tag{2.69}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}x^3} = \mathcal{L}. \tag{2.70}$$

W tym cechowaniu funkcja Lagrange'a zależy na ogół od parametru ewolucji; opisywany nią układ dynamiczny jest autonomiczny, jeżeli x^3 jest zmienną cykliczną.

Po ustaleniu cechowania formalizm Lagrange'a definiuje niezdegenerowaną metrykę i możemy w standardowy sposób przejść do sformułowania hamiltonowskiego. Pędy uogólnione mają postać:

$$p_a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} = -g_a + \frac{\gamma_{ab}\dot{x}^b + \gamma_{a3}}{\sqrt{g_{00}}\sqrt{\gamma_{cd}\dot{x}^c\dot{x}^d + 2\gamma_{c3}\dot{x}^c + \gamma_{33}}}, \tag{2.71}$$

przy czym indeksy a, b, c, d przebiegają wartości 1,2. Równania (2.71) można rozwiązać względem $\dot{x}^a \equiv \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x^3}$:

$$\dot{x}^a = \sqrt{g_{00}}\sqrt{\frac{\gamma_{33} - \tilde{\gamma}^{cd}\gamma_{c3}\gamma_{d3}}{1 - g_{00}\tilde{\gamma}^{cd}\Pi_c\Pi_d}}\tilde{\gamma}^{ad}\Pi_d - \gamma_{d3}\tilde{\gamma}^{ad}, \tag{2.72}$$

gdzie Π_a są zdefiniowane wzorem (2.50) oraz

$$\tilde{\gamma}^{ab} \equiv \gamma^{ab} - \frac{1}{\gamma^{33}}\gamma^{a3}\gamma^{b3}. \tag{2.73}$$

Wykorzystując powyższe relacje możemy wyliczyć hamiltonian

$$\mathcal{H} \equiv \dot{x}^a p_a - \mathcal{L} \tag{2.74}$$

lub

$$\mathcal{H} = \frac{g_{03}}{g_{00}} - \gamma_{a3}\ \tilde{\gamma}^{ab}\ \Pi_b - \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{\frac{1 - g_{00}\ \tilde{\gamma}^{ab}\ \Pi_a\Pi_b}{\gamma^{33}}}. \tag{2.75}$$

Mając hamiltonian możemy opisać propagację światła w terminach formalizmu Hamiltona według schematu opisanego w Dodatku A.

2.6 Geodezyjne dla metryki sferycznie symetrycznej

Element długości w metryce o symetrii sferycznej można napisać w postaci [44]

$$\mathrm{d}s^2 = B(r)\,\mathrm{d}t^2 - A(r)\,\mathrm{d}r^2 - r^2 D(r)\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right), \tag{2.76}$$

gdzie $A(r)$, $B(r)$ i $D(r)$ są funkcjami bezwymiarowymi. Ze względu na symetrię sferyczną, geodetyki leżą w płaszczyznach przechodzących przez początek układu współrzędnych; bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $\theta = \frac{\pi}{2}$. Metryka (2.76) redukuje się wtedy do

$$\mathrm{d}s^2 = B(r)\,\mathrm{d}t^2 - A(r)\,\mathrm{d}r^2 - r^2 D(r)\,\mathrm{d}\phi^2. \tag{2.77}$$

Linie geodezyjne opisane są równaniami Lagrange'a, wynikającymi z zasady wariacyjnej

$$\delta \int L\,\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{2.78}$$

gdzie

$$L = \frac{1}{2}\left(B(r)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - A(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - r^2 D(r)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2\right), \tag{2.79}$$

a σ jest parametrem afinicznym. L nie zależy od t i ϕ, co implikuje zachowanie odpowiednich pędów uogólnionych. W rezultacie dynamika opisana równaniami (2.78) i (2.79) jest całkowalna, gdyż posiada trzy poissonowsko komutujące całki ruchu $H = L$, p_t i p_ϕ, gdzie

$$p_t \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = B(r)\dot{t}, \quad \dot{t} \equiv \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma} \tag{2.80}$$

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -r^2 D(r)\dot{\phi}, \quad \dot{\phi} \equiv \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}. \tag{2.81}$$

Całki ruchu zależą od wyboru parametru afinicznego, zdefiniowanego z dokładnością do transformacji afinicznej, $\sigma \to a\sigma + d$. Istotny fizycznie, niezależny od wyboru σ, niezmienniczy parametr zderzenia jest zdefiniowany wzorem

$$b = \left|\frac{p_\phi}{p_t}\right| = \frac{r^2 D(r)}{B(r)}\left|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right|. \tag{2.82}$$

Dla geodezyjnych zerowych $L = 0$ i lagranżjan (2.40) przyjmuje postać

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma} = \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + \frac{r^2 D(r)}{B(r)}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2}. \tag{2.83}$$

Ze względu na niezmienniczość na reparametryzację możemy położyć $\sigma = \phi$; wtedy

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{r^2 D(r)}{B(r)}}. \tag{2.84}$$

Zagadnienie wyznaczenia trajektorii zerowych sprowadza się do jednowymiarowej dynamiki z ϕ jako parametrem ewolucji. Ponieważ $\mathcal{L}$ nie zależy od ϕ, „energia" $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E} \equiv \dot{r}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \mathcal{L} \tag{2.85}$$

jest całką ruchu. Z (2.85) dostajemy

$$\mathcal{E} = \frac{-r^2 \frac{D(r)}{B(r)}}{\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{r^2 D(r)}{B(r)}}}. \tag{2.86}$$

Uwzględniając, że $\mathrm{d}t = \mathcal{L}\,\mathrm{d}\phi$ dostajemy z (2.82) i (2.86):

$$b = |\mathcal{E}|\,. \tag{2.87}$$

Równania (2.86) i (2.87) dają

$$\frac{A(r)B(r)}{r^4 D^2(r)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{B(r)}{r^2 D(r)} = \frac{1}{b^2}. \tag{2.88}$$

Oznaczając przez r_0 współrzędną punktu najbliższego centrum, mamy

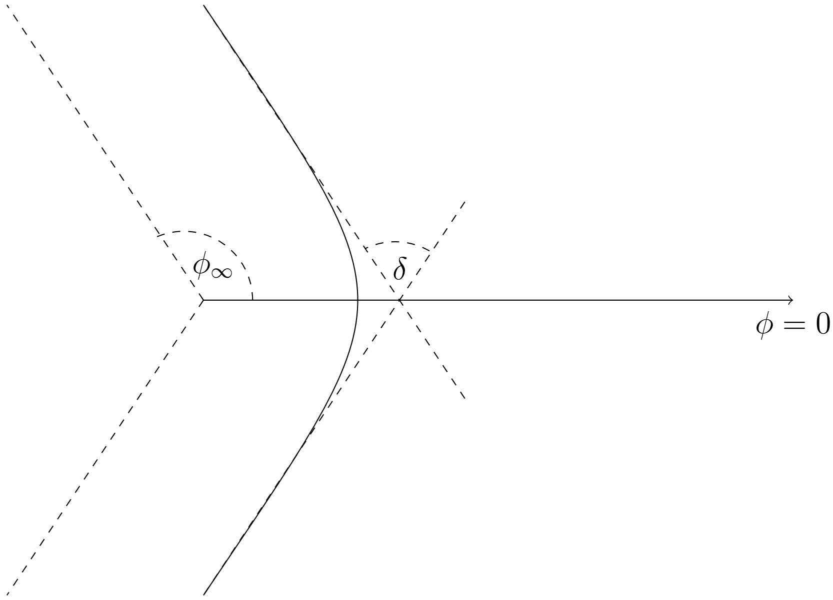
$$\frac{B(r_0)}{r_0^2 D(r_0)} = \frac{1}{b^2}. \tag{2.89}$$

Rozdzielając zmienne w równaniu (2.88) i uwzględniając (2.89), dostajemy

$$\int \mathrm{d}\phi = \int \frac{\mathrm{d}r}{r}\sqrt{\frac{A(r)}{D(r)}\left(\frac{D(r)}{B(r)}\frac{B(r_0)}{D(r_0)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right)^{-1}}. \tag{2.90}$$

W szczególności, dla kąta odchylenia (por. rys (2.2)) otrzymujemy [44]

$$\delta = 2\int\limits_{r_0}^{\infty}\sqrt{\frac{A(r)}{D(r)}\left(\frac{D(r)}{B(r)}\frac{B(r_0)}{D(r_0)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right)^{-1}} - \pi. \tag{2.91}$$



Rysunek 2.2: Geometria kąta odchylenia promienia świetlnego.

2.7 Zasada Fermata dla metryki Schwarzschilda–de Sittera

Szczególnym przykładem metryki sferycznie symetrycznej jest metryka Schwarzschilda–de Sittera, opisująca czarną dziurę w czasoprzestrzeni ze stałą kosmologiczną [45]. Odpowiedni element długości ma postać (2.76), przy czym (współrzędną radialną i czasową oznaczamy odpowiednio przez R i T):

$$B(R) = \frac{1}{A(R)} = 1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2 \tag{2.92}$$

$$D(R) = 1 \tag{2.93}$$

oraz $\Lambda > 0$ (dla $\Lambda < 0$ mamy do czynienia z przestrzenią Schwarzschilda–anty-de Sittera). Zakładając, że

$$0 < \Lambda < \frac{1}{9}M^2, \tag{2.94}$$

wnioskujemy [46, 47], że równanie

$$B(R) = 0 \tag{2.95}$$

ma trzy pierwiastki rzeczywiste

$$R_1 < 0 < R_2 < R_3 \tag{2.96}$$

oraz

$$B(R) > 0 \text{ dla } R_2 < R < R_3. \tag{2.97}$$

Zatem między dwoma horyzontami, $R = R_2$ i $R = R_3$, mamy obszar metryki statycznej. Dla pozostałych wartości $\Lambda > 0$ obszar statyczny nie istnieje [46, 47]. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że nierówności (2.94) są spełnione.

Jak pokazano w poprzednim paragrafie, równania geodezyjnych dla metryki sferycznie symetrycznej są całkowalne w sensie Arnolda–Liouville'a. W szczególnym przypadku metryki Schwarzschilda–de Sittera odpowiednie rozumowanie, nie zakładające, że ruch odbywa się w płaszczyźnie $\theta = \frac{\pi}{2}$, przytaczamy w Dodatku E.

Dokonując transformacji współrzędnych

$$R = ar(1+\mu)^2 \tag{2.98}$$
$$T = t + \zeta(R), \tag{2.99}$$

gdzie

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \equiv e^{Ht} \tag{2.100}$$
$$\mu = \frac{M}{2a(t)r} \tag{2.101}$$
$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}R} = \frac{HR}{\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\left(1-\frac{2M}{R}-\frac{\Lambda}{3}R^2\right)}, \tag{2.102}$$

otrzymujemy metrykę McVittie [48], [47]:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 \mathrm{d}t^2 - (1+\mu)^4 a^2(t)\left(\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\right). \tag{2.103}$$

Dla $M = 0$ dostajemy metrykę Friedmana-Lemaitre'a-Robertsona-Walkera (FLRW). Z kolei dla $\Lambda = 0$ metryka McVittie przyjmuje postać

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{1-\frac{M}{2r}}{1+\frac{M}{2r}}\right)^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1+\frac{M}{2r}\right)^4 \left(\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right). \tag{2.104}$$

Definiując

$$\rho \equiv r\left(1+\frac{M}{2r}\right)^2, \tag{2.105}$$

możemy przepisać (2.104) w postaci

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}\rho^2}{1 - \frac{2M}{\rho}} - \rho^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi^2 \right), \tag{2.106}$$

opisującej standardową metrykę Schwarzschilda. Konkludując, metryka McVittie opisuje czarną dziurę w rozszerzającym się Wszechświecie.

Aby opisać propagację promieni świetlnych w metryce (2.103), posłużymy się zasadą Fermata. Zauważmy, że metryka ta zależy jawnie od czasu, więc należy zastosować zasadę Fermata w najogólniejszej postaci.

Z równania $\mathrm{d}s^2 = 0$ i formuły (2.103) otrzymujemy funkcję Lagrange'a zależną od działania $S \equiv t$:

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, t) \equiv \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\phi} = \frac{(1+\mu)^3}{1-\mu} a(t) \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} \tag{2.107}$$

$$\dot{r} \equiv \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}, \tag{2.108}$$

gdzie niezmienniczość na reparametryzację wykorzystaliśmy do wyboru kąta ϕ jako parametru ewolucji, zaś niezmienniczość na obroty do wyboru $\theta = \frac{\pi}{2}$. Oznaczmy

$$h(r,t) \equiv \frac{(1+\mu)^3}{1-\mu} a, \tag{2.109}$$

tak, że

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, t) = h(r,t) \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}. \tag{2.110}$$

Równania Lagrange'a w wersji Herglotza:

$$\dot{t} = \mathcal{L}(r, \dot{r}, t) \tag{2.111}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = 0 \tag{2.112}$$

dają

$$\dot{t} = h\sqrt{\dot{r}^2 + r^2} \tag{2.113}$$

$$r\ddot{r} - 2\dot{r}^2 - r^2 - \frac{\partial \ln h}{\partial r} r(\dot{r}^2 + r^2) = 0. \tag{2.114}$$

Wykorzystamy teraz uogólnione twierdzenie Noether, opisane w Dodatku A, do znalezienia całek ruchu. Transformacja symetrii

$$q_i \to q_i + \delta q_i \tag{2.115}$$

$$t \to t + \delta t \tag{2.116}$$

$$S \to S + \delta S \tag{2.117}$$

prowadzi do następującej całki ruchu:

$$C = e^{-\int\limits_0^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S}\, \mathrm{d}t'} \left(\delta t \mathcal{L} + (\delta q_i - \dot{q}_i \delta t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \delta S \right). \tag{2.118}$$

W naszym przypadku $t \to \phi$, $q \to r$, $S \to t$. Całka (2.118) ma charakter nielokalny ze względu na wykładnik zawierający wyrażenie zależące od trajektorii w przedziale czasu $(0, t)$. Jednakże, jak wyjaśniono w Dodatku A, czynnik nielokalny jest uniwersalny, niezależny od konkretnej postaci transformacji symetrii. Wobec tego, mając n niezależnych transformacji symetrii możemy utworzyć $n - 1$ lokalnych całek ruchu tworząc ilorazy wyjściowych całek.

Lagranżjan $\mathcal{L}$ nie zależy jawnie od parametru ewolucji ϕ. Korzystając z równań (A.23)–(A.26) widzimy, że transformacja

$$\delta\phi = \psi \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0 \right) \tag{2.119}$$

$$\delta r = 0 \tag{2.120}$$

$$\delta t = 0 \tag{2.121}$$

jest transformacją symetrii. Równanie (2.118) daje więc

$$C_1 = e^{-\int\limits_0^\phi \frac{\partial R}{\partial t}\, \mathrm{d}\phi} \left(\mathcal{L} - \dot{r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right), \tag{2.122}$$

czyli

$$C_1 = e^{-\int\limits_0^\phi \frac{\partial h}{\partial t} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}\, \mathrm{d}\phi} \frac{h r^2}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}}. \tag{2.123}$$

Rozważmy z kolei transformację

$$\delta t = \tau \quad (\equiv const) \tag{2.124}$$

$$\delta r = -H r \tau \equiv -\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} r \tau \tag{2.125}$$

$$\delta \phi = 0. \tag{2.126}$$

Ponownie równania (A.23)–(A.26) implikują, że jest to transformacja symetrii. Odpowiednia całka ruchu (2.118) ma postać

$$C_2 = e^{-\int\limits_0^\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\, \mathrm{d}\phi} \left(\mathcal{L} - H r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - 1 \right) \tag{2.127}$$

lub jawnie

$$C_2 = -e^{-\int\limits_0^{\phi} \frac{\partial h}{\partial t}\sqrt{\dot{r}^2+r^2}\,\mathrm{d}\phi} \left(\frac{Hhr\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2}}+1\right). \tag{2.128}$$

Iloraz całek C_1 i C_2 jest lokalną całką ruchu

$$C \equiv -\frac{C_2}{C_1} = H\left(\frac{\dot{r}}{r}\right) + \frac{\sqrt{\dot{r}^2+r^2}}{hr^2}. \tag{2.129}$$

Wykorzystując równania (2.113), (2.114) łatwo sprawdzić, że C jest rzeczywiście całką ruchu, $\dot{C} = 0$.
Równania (2.100), (2.101) i (2.113) implikują

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\frac{\dot{r}}{r} - Hh\sqrt{\dot{r}^2+r^2}, \tag{2.130}$$

skąd wynika, że

$$C^2 + H^2 = \frac{(1-\mu)^2}{(1+\mu)^6}\left(\dot{\mu}^2+\mu^2\right). \tag{2.131}$$

Prawa strona równania (2.131) pokrywa się z całką ruchu otrzymaną w Dodatku F bezpośrednio z równań ruchu we współrzędnych statycznych.

Pierwotny układ równań ruchu (2.107), (2.108) sprowadza się więc do układu dwóch równań pierwszego rzędu:

$$\dot{t} = h\sqrt{\dot{r}^2+r^2} \tag{2.132}$$

$$\frac{H\dot{r}}{r} + \frac{\sqrt{\dot{r}^2+r^2}}{hr^2} = C. \tag{2.133}$$

Równania (2.132), (2.133) dają się scałkować przez kwadratury. Zauważmy najpierw, że wynikająca z nich całka (2.131) prowadzi do równania pierwszego rzędu w μ, które całkujemy przez rozdzielenie zmiennych, otrzymując funkcję $\mu = \mu(\phi)$. Wprowadzając zmienną

$$\tau = \ln r \tag{2.134}$$

możemy przepisać równanie (2.133) w postaci

$$H\dot{\tau} + F(\mu)\sqrt{\dot{\tau}+1} = C, \tag{2.135}$$

gdzie

$$F(\mu) = \frac{2\mu(1-\mu)}{M\left(1+\mu^3\right)} \tag{2.136}$$

jest znaną funkcją ϕ, $\tilde{F}(\phi) = F(\mu(\phi))$. Równanie (2.135) jest równaniem algebraicznym dla $\dot{\tau}$. Rozwiązując je względem $\dot{\tau}$ i całkując, dostajemy funkcję

$r = r(\phi)$. Następnie, podstawiając $\mu = \mu(\phi)$, $r = r(\phi)$ do równania (2.132) przepisanego w postaci

$$e^{-Ht}\dot{t} = \frac{(1+\mu)^3}{1-\mu}\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}, \tag{2.137}$$

znajdujemy funkcję $t = t(\phi)$.

W rozpatrywanym przypadku mamy do czynienia z uogólnieniem Herglotza formalizmu Lagrange'a. Nie jest to jednak przypadek najogólniejszy, gdyż przejście do współrzędnych sferycznych (por. (2.98), (2.99)) sprowadza zagadnienie do standardowych równań Lagrange'a.

2.8 Metryki z symetrią aksjalną

Rozważmy bardziej ogólny przypadek metryki o symetrii aksjalnej. Ograniczymy się przy tym do ruchu w płaszczyźnie równikowej i rozważymy metrykę postaci

$$\mathrm{d}s^2 = B(r)\,\mathrm{d}t^2 - A(r)\,\mathrm{d}r^2 - r^2 D(r)\,\mathrm{d}\phi^2 + 2rF(r)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi. \tag{2.138}$$

Dużą część dyskusji dotyczącej przypadku sferycznie symetrycznego można powtórzyć dla metryki aksjalnie symetrycznej. Lagranżjan opisujący ruch po geodezyjnych ma postać

$$\begin{aligned} L =& \frac{1}{2}\Bigg\{B(r)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - A(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - r^2 D(r)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\ &+ 2rF(r)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.139}$$

gdzie σ, jak zwykle, jest parametrem afinicznym. Postać L implikuje istnienie dwóch całek ruchu:

$$p_t \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)} = B(r)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma} + rF(r)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma} \tag{2.140}$$

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)} = -r^2 D(r)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma} + rF(r)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}. \tag{2.141}$$

Inwariantny parametr zderzenia ma teraz postać

$$b = \left|\frac{p_\phi}{p_t}\right| = \left|\frac{-r^2 D(r) + rF(r)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\phi}}{B(r)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\phi} + rF(r)}\right|. \tag{2.142}$$

Zasada Fermata nadal obowiązuje, więc wyliczając $\mathrm{d}t$ z równania $\mathrm{d}s^2 = 0$ dostajemy zasadę wariacyjną w postaci

$$\delta \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}\phi = 0, \tag{2.143}$$

gdzie

$$\mathcal{L} = \frac{-rF(r)}{B(r)} + \frac{1}{\sqrt{B(r)}}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\phi} \tag{2.144}$$

z elementem długości przestrzennej postaci

$$\mathrm{d}l^2 = A(r)\,\mathrm{d}r^2 + \left(r^2 D(r) + \frac{r^2 F^2(r)}{B(r)}\right)\mathrm{d}\phi^2. \tag{2.145}$$

Lagranżjan $\mathcal{L}$ nie zależy jawnie od ϕ, więc „energia" jest zachowana $\left(\text{"}\cdot\text{"} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\right)$:

$$\mathcal{E} \equiv \dot{r}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \mathcal{L} = \frac{rF(r)}{B(r)} - \frac{r^2 D(r) + r^2\frac{F^2(r)}{B(r)}}{\sqrt{B(r)}\sqrt{A(r)\dot{r}^2 + r^2 D(r) + \frac{r^2F^2(r)}{B(r)}}} \tag{2.146}$$

jest całką ruchu.

Tak jak w przypadku sferycznie symetrycznym, relacja $\mathrm{d}t = \mathcal{L}\,\mathrm{d}\phi$ implikuje

$$b = |\mathcal{E}|. \tag{2.147}$$

Rozdzielając zmienne w równaniu (2.146), otrzymujemy równanie trajektorii $r = r(\phi)$. Całkując równanie o rozdzielonych zmiennych po r, otrzymalibyśmy odpowiednik wyrażenia (2.91) na kąt odchylenia promieni świetlnych w czasoprzestrzeni o symetrii aksjalnej. Nie będziemy go tu przytaczać, gdyż jest dość skomplikowany.

Przykładem metryki aksjalnie symetrycznej jest metryka Kerra, opisująca obracającą się czarną dziurę. W terminach zmiennej u mamy

$$A(u) = \frac{1}{1 - 2u + \frac{k^2}{m^2}u^2} \tag{2.148}$$

$$B(u) = 1 - 2u \tag{2.149}$$

$$D(u) = 1 + \frac{k^2}{m^2}u^2(1+2u) \tag{2.150}$$

$$F(u) = \frac{-2k}{m}u^2. \tag{2.151}$$

Korzystając z tych relacji możemy równanie (2.146) przekształcić do postaci

$$\dot{u}^2 = \frac{\left(1 - 2u + \frac{k^2}{m^2}u^2\right)^2}{\left(1 - 2u\left(1 - \frac{k}{\mathcal{E}}\right)\right)^2} \left(2\left(1 - \frac{k}{\mathcal{E}}\right)^2 u^3 - \left(1 - \frac{k^2}{\mathcal{E}^2}\right)u^2 + \frac{m^2}{\mathcal{E}^2}\right), \quad (2.152)$$

co pokrywa się z równaniem (11) z [49]. W następnym rozdziale wykorzystamy (2.152) do policzenia kąta odchylenia promieni świetlnych w metryce o symetrii aksjalnej.

Rozdział 3

Trajektorie promieni świetlnych przy dużym parametrze zderzenia

Zajmiemy się teraz przybliżonym opisem trajektorii promieni świetlnych w przypadku, gdy tzw. niezmienniczy parametr zderzenia ma dużą wartość (np. w porównaniu z promieniem horyzontu). Równania ruchu, wynikające z zasady Fermata, sprowadzają się wtedy do równań opisujących dynamikę nieliniowego oscylatora. Te ostatnie można rozwiązywać perturbacyjnie. Jak wiadomo [50–52] (por. również Dodatek D), bezpośrednie zastosowanie rachunku zaburzeń prowadzi do pojawiania się tzw. członów rezonansowych. W rezultacie otrzymujemy rozwiązania w postaci szeregów, których wyrazy zawierają wielomiany w parametrze ewolucji. Odpowiednie rozwiązania przybliżone, wynikające z ograniczenia się do pierwszych wyrazów szeregu perturbacyjnego, dają rozsądne przybliżenie tylko dla małych wartości parametru ewolucji. Rachunek zaburzeń można poprawić, modyfikując go metodą Lindstedta–Poincarégo [50–52] (Dodatek D), którego istotą jest eliminacja, w każdym rzędzie rachunku zaburzeń, członów rezonansowych przez wzięcie pod uwagę poprawek do częstości oscylacji.

Zastosowanie metody Lindstedta–Poincarégo pozwala na elegancki opis asymptotycznych trajektorii promieni świetlnych.

3.1 Metryka sferycznie symetryczna

Punktem wyjścia jest metryka (2.77), opisująca sferycznie symetryczną czasoprzestrzeń (jak zwykle, ze względu na symetrię sferyczną możemy założyć, że ruch odbywa się w płaszczyźnie równikowej, $\theta = \frac{\pi}{2}$). Odpowiednia funkcja Lagrange'a $\mathcal{L}$, wynikająca z zasady Fermata, zdefiniowana jest równaniem

(2.84). Z równań (2.86) i (2.87) otrzymujemy

$$\frac{A(r)B(r)}{D^2(r)}\frac{\dot{r}^2}{r^4} + \frac{B(r)}{r^2 D(r)} = \frac{1}{b^2}. \tag{3.1}$$

Zauważmy, że w równaniu (2.132) występują tylko stosunki $\frac{A}{D}$ i $\frac{B}{D}$. Wynika to z faktu, że geodezyjne zerowe są konforemnie niezmiennicze, więc pokrywają się (z dokładnością do reparametryzacji) z geodezyjnymi zerowymi dla metryki $\mathrm{d}\widetilde{s}^2 \equiv D^{-1}(r)\,\mathrm{d}s^2$. Wprowadzając nową zmienną

$$u \equiv \frac{m}{r} \tag{3.2}$$

i oznaczenia

$$\frac{A(r)B(r)}{D^2(r)} \equiv \tilde{A}(u) \tag{3.3}$$

$$\frac{B(r)}{D(r)} \equiv \tilde{B}(u), \tag{3.4}$$

możemy napisać równanie (3.1) w postaci

$$\tilde{A}(u)\dot{u}^2 + u^2\tilde{B}(u) = \frac{m^2}{b^2}. \tag{3.5}$$

Przypadek dużego parametru zderzenia, $b^2 \gg m^2$ oznacza, że

$$\frac{m^2}{b^2} \ll 1. \tag{3.6}$$

Zacznijmy od metryki Schwarzschilda. Wtedy

$$\tilde{A}(u) \equiv 1 \tag{3.7}$$

$$\tilde{B}(u) \equiv 1 - 2u \tag{3.8}$$

i całka ruchu (2.132) przybiera postać

$$\frac{\dot{u}^2}{2} + \frac{u^2}{2} - u^3 = \frac{m^2}{2b^2} \tag{3.9}$$

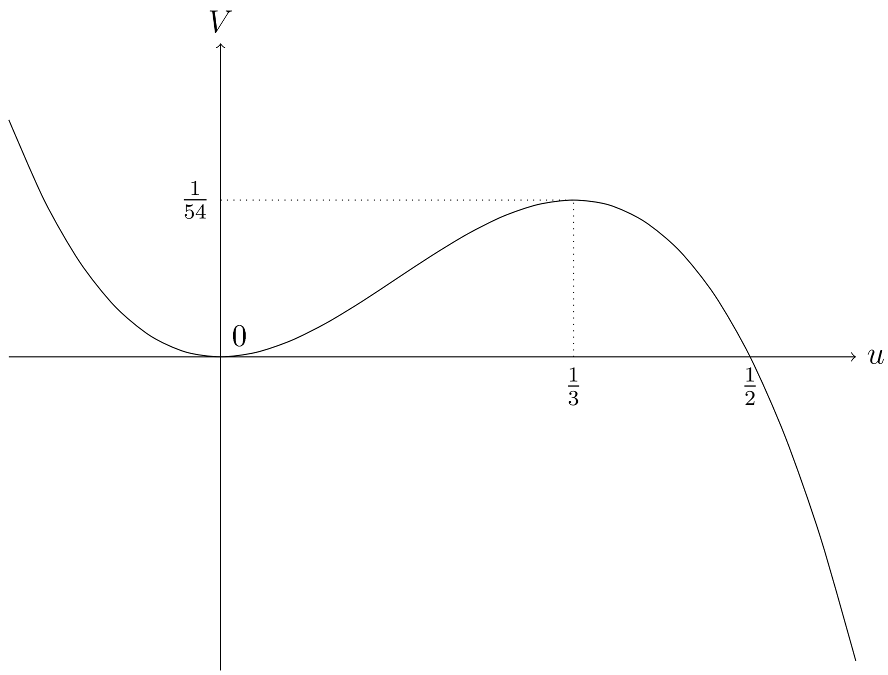
i jest równa energii ruchu jednowymiarowego w potencjale

$$V(u) \equiv \frac{1}{2}u^2 - u^3 \tag{3.10}$$

(przy czym kąt ϕ jest tu parametrem ewolucji). Różniczkując (3.9) po ϕ otrzymujemy równanie ruchu (które, oczywiście, można również otrzymać z lagranżjanu $\mathcal{L}$):

$$\ddot{u} + u - 3u^2 = 0. \tag{3.11}$$

Potencjał $V(u)$ przedstawiony jest na Rys. (3.1).



Rysunek 3.1: Potencjał $V(u)$ odpowiadający metryce Schwarzschilda.

Energia $\frac{m^2}{2b^2}$ odpowiada obszarowi oscylacyjnemu, jeżeli $\frac{m^2}{2b^2} < \frac{1}{54}$ (i $u < \frac{1}{3}$). Dla małych wartości u, $V(u) \sim \frac{1}{2}u^2$ i z równania (3.9) wynika, że $u^2 \lesssim \frac{m^2}{b^2}$. Zatem w granicy dużego parametru zderzenia, $b^2 \gg m^2$, $u \ll 1$, mamy do czynienia z małymi oscylacjami. Możemy więc zastosować metodę Lindstedta–Poincarégo do znalezienia rozwiązania równania (3.9) w postaci szeregu perturbacyjnego w małym parametrze $\frac{m}{b}$. W naszym przypadku $\omega_0 = 1$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_n = 0$ dla $n > 2$, w oznaczeniach z Dodatku D. Równania (D.18)-(D.21) dają następujące wyrażenie dla u z dokładnością do wyrazów czwartego stopnia w amplitudzie a:

$$\begin{aligned} u =& a\cos(\omega\phi) + \frac{a^2}{2}(3 - \cos(2\omega\phi)) + \frac{3}{16}a^3\cos(3\omega\phi) \\ &+ \frac{a^4}{8}(57 - \frac{59}{2}\cos(2\omega\phi) - \frac{1}{2}\cos(4\omega\phi)). \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\omega = 1 - \frac{15}{4}a^2 \tag{3.13}$$

Z rozważań opisanych w Dodatku D wynika, że aby otrzymać u z dokładnością do wyrazów czwartego stopnia w a, wystarczy znać ω z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia. Co więcej, współczynnik przy a^3 w rozwinięciu częstości ω znika.

Fizycznie istotnym parametrem nie jest a, lecz $\frac{m}{b}$. By powiązać te dwie wielkości zauważmy, że $\dot{u}_0 \equiv \dot{u}(\phi = 0) = 0$. Zatem równanie (3.9) daje

$$\frac{1}{2}u_0^2 - u_0^3 = \frac{m^2}{2b^2}. \tag{3.14}$$

Z drugiej strony, kładąc $\phi = 0$ w (3.12) dostajemy

$$u_0 = a + a^2 + \frac{3}{16}a^3 + \frac{27}{8}a^4. \tag{3.15}$$

Eliminując u_0 z (3.14) i (3.15) otrzymujemy związek między a i $\frac{m}{b}$:

$$a = \frac{m}{b} + \frac{37}{16}\left(\frac{m}{b}\right)^3 \tag{3.16}$$

z dokładnością do wyrazów czwartego stopnia. Podstawiając (3.16) do (3.12) otrzymujemy równanie trajektorii $u = u(\phi)$ wyrażone w terminach fizycznego parametru $\frac{m}{b}$.

Zauważmy, że w przeciwieństwie do naiwnego rachunku zaburzeń [38], [39], metoda Lindstedta–Poincaré poprawnie odtwarza okresowość ruchu w potencjale (3.10). Mamy do czynienia z małymi drganiami zmiennej dynamicznej u. Bezpośredni sens fizyczny ma obszar $u > 0$; śledząc jednak zmienność u w przeciągu jednego okresu wnioskujemy, że trajektorie promieni świetlnych łączą się w naturalny sposób w grupy opisywane przez konkretną trajektorię nieliniowego oscylatora.

Jako prosty przykład zastosowania policzymy kąt odchylenia δ promienia świetlnego z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia w $\frac{m}{b}$. Odpowiednią geometrię obrazuje Rys. 2.1. Z rysunku tego wynika, że

$$\delta = 2\phi_\infty - \pi, \tag{3.17}$$

przy czym kąt ϕ_∞ wyznaczamy z równania $r(\phi_\infty) = \infty$, czyli

$$u(\phi_\infty) = 0. \tag{3.18}$$

Kładąc $\cos(\omega\phi_\infty) \equiv y$ dostajemy z (3.12)

$$y + a(2 - y^2) + \frac{3}{16}a^2(4y^3 - 3y) + a^3\left(\frac{43}{4} - \frac{55}{8}y^2 - \frac{1}{2}y^4\right) = 0. \tag{3.19}$$

Rozwiązanie tego równania, dążące do 0 przy a dążącym do zera, z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia w a, ma postać

$$y = -2a - \frac{63}{8}a^3. \tag{3.20}$$

Kładąc

$$\omega\phi_\infty = \frac{\pi}{2} + \Delta \tag{3.21}$$

mamy

$$\sin\Delta = 2a + \frac{63}{8}a^3. \tag{3.22}$$

Dla $a \ll 1$ mamy $\Delta \ll 1$, $\sin\Delta \simeq \Delta - \frac{1}{6}\Delta^3$ i równanie (3.22) daje

$$\Delta \simeq 2a + \frac{221}{24}a^3. \tag{3.23}$$

Zatem, z dokładnością do wyrazów trzeciego rzędu

$$\begin{aligned}\delta = 2\phi_\infty - \pi = \frac{\pi + 2\Delta}{\omega} - \pi &\simeq \left(\pi + 4a + \frac{221}{12}a^3\right)\left(1 + \frac{15}{4}a^2\right) - \pi \\ &\simeq 4a + \frac{15\pi}{4}a^2 + \frac{401}{12}a^3\end{aligned} \tag{3.24}$$

lub, uwzględniając związek (3.16) między a i $\frac{m}{b}$,

$$\delta = 4\frac{m}{b} + \frac{15\pi}{4}\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \frac{128}{3}\left(\frac{m}{b}\right)^3 \tag{3.25}$$

w zgodzie z rezultatem otrzymanym w [53], przez rozwinięcie w szereg w $\frac{m}{b}$ całki eliptycznej otrzymanej z rozdzielenia zmiennych w równaniu (3.9).

Jako drugi przykład rozważmy metrykę Reissnera–Nordströma, opisującą naładowaną czarną dziurę. Ma ona postać (2.77) z

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad D(r) = 1, \tag{3.26}$$

gdzie q jest ładunkiem czarnej dziury. Z (3.3) i (3.4) otrzymujemy

$$\tilde{A}(u) = 1, \quad \tilde{B}(u) = 1 - 2u + \frac{q^2}{m^2}u^2. \tag{3.27}$$

Całka „energii" (3.9) przybiera postać

$$\frac{\dot{u}^2}{2} + \frac{u^2}{2} - u^3 + \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{u^4}{2} = \frac{m^2}{2b^2}, \tag{3.28}$$

zaś równaniem ruchu jest

$$\ddot{u} + u - 3u^2 + 2\left(\frac{q}{m}\right)^2 u^3 = 0. \tag{3.29}$$

Ponownie mamy do czynienia z jednowymiarowym ruchem w potencjale

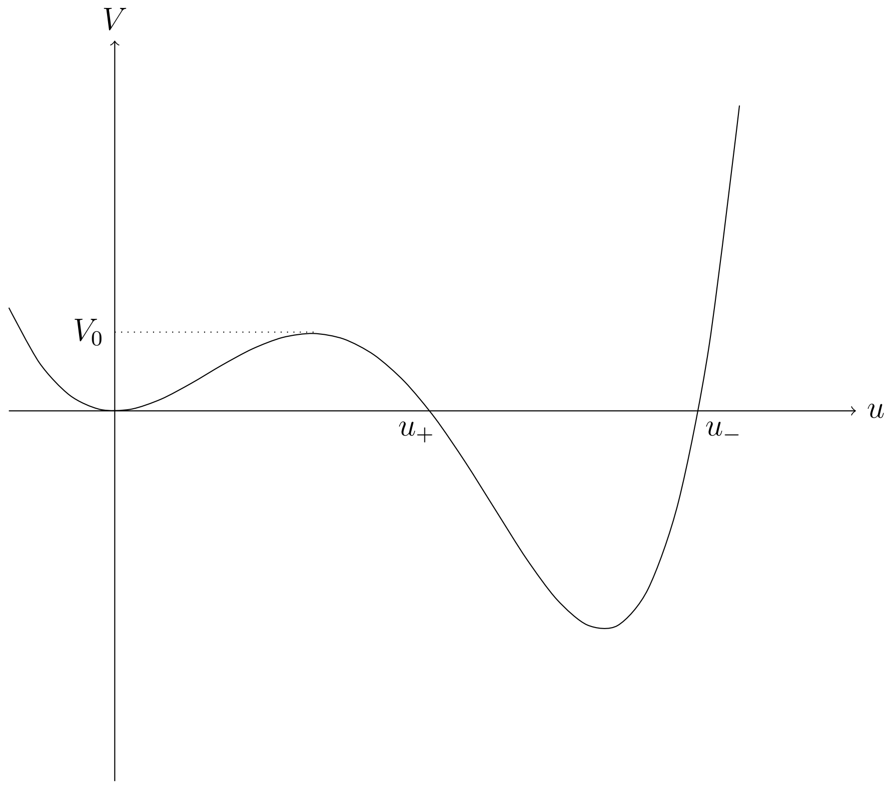
$$V(u) = \frac{1}{2}u^2 - u^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right)^2 u^4 \tag{3.30}$$

Czarna dziura istnieje, gdy $\left(\frac{q}{m}\right)^2 \leq 1$; w przeciwnym przypadku mamy do czynienia z tzw. nagą osobliwością. Kształt potencjału pokazany jest na rysunku (3.2); u_+ i u_- odpowiadają zewnętrznemu i wewnętrznemu horyzontowi:

$$u_\pm = 2\left(\frac{m}{q}\right)^2 \left(1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2}\right). \tag{3.31}$$

Dla małych wartości $\frac{m}{b}$, $V\left(\frac{m}{b}\right) \ll V_0$ i $u < u_+$ mamy do czynienia z małymi drganiami anharmonicznymi.
Równanie (3.29) opisuje oscylator nieliniowy, przy czym, w oznaczeniach z Dodatku D

$$\alpha_1 \equiv \omega_0^2 = 1, \quad \alpha_2 = -3, \quad \alpha_3 = 2\left(\frac{q}{m}\right)^2, \quad \alpha_n = 0, \quad n \geq 4. \tag{3.32}$$



Rysunek 3.2: Potencjał odpowiadający czarnej dziurze Reissnera–Nordströma.

Z dokładnością do wyrazów czwartego stopnia w a, rozwiązanie równania (3.32) ma, zgodnie z (D.18)–(D.29), postać

$$\begin{aligned}u =&a\cos(\omega\phi) + \frac{a^2}{2}\left(3 - \cos(2\omega\phi)\right) + a^3\left(\frac{3}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)\cos(3\omega\phi)\\ &+\left(\frac{57}{8} - \frac{15}{4}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)a^4 + \left(-\frac{59}{16} + \frac{31}{16}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)a^4\cos(2\omega\phi)\\ &-\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)a^4\cos(4\omega\phi).\end{aligned} \tag{3.33}$$

Związek między częstością i amplitudą, z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia, przybiera na mocy (D.24), (D.26), (D.28), postać

$$\omega = 1 + \left(\frac{3}{4}\left(\frac{q}{m}\right)^2 - \frac{15}{4}\right)a^2. \tag{3.34}$$

Wykorzystując fakt, że ponownie $\dot{u}_0 = \dot{u}(\phi = 0) = 0$ dostajemy z (3.28)

$$u_0^2 - 2u_0^3 + \left(\frac{q}{m}\right)^2 u_0^4 = \frac{m^2}{b^2}. \tag{3.35}$$

Z drugiej strony, kładąc $\phi = 0$ w (3.33) mamy

$$u_0 = a + a^2 + \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right) a^3 + \left(\frac{27}{8} - \frac{15}{8}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right) a^4. \tag{3.36}$$

Eliminując u_0 z (3.35) i (3.36), dostajemy uogólnienie relacji (3.16):

$$a = \frac{m}{b} + \left(\frac{37}{16} - \frac{9}{16}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)\left(\frac{m}{b}\right)^3. \tag{3.37}$$

Podstawiając wyrażenie na a do (3.33), otrzymujemy równanie trajektorii $u = u(\phi)$, wyrażone w terminach fizycznego parametru $\frac{m}{b}$.
Ponownie kładąc $y \equiv \cos(\omega\phi_\infty)$ dostajemy z (3.33) równanie

$$\begin{aligned} & y + a(2 - y^2) + a^2\left(\frac{3}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)(4y^3 - 3y) \\ & + a^3\left(\frac{57}{8} - \frac{15}{4}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right) + \left(\frac{-59}{16} + \frac{31}{16}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)\left(2y^2 - 1\right) \\ & - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)\left(8y^4 - 8y^2 + 1\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Rozwiązując z dokładnością do wyrazów proporcjonalnych do a^4, otrzymujemy

$$y = -2a - \left(\frac{63}{8} - \frac{43}{8}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right) a^3 \tag{3.39}$$

lub, kładąc $y = -\sin\Delta \simeq -\Delta + \frac{1}{6}\Delta^3$:

$$\Delta = 2a + \left(\frac{221}{24} - \frac{43}{8}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right) a^3. \tag{3.40}$$

Stąd dla kąta odchylenia mamy

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{\pi + 2\Delta}{\omega} - \pi \\ = & \left(\pi + 4a + \left(\frac{221}{12} - \frac{43}{4}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right) a^3\right) \\ & \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\left(\frac{q}{m}\right)^2 - \frac{15}{4}\right) a^2\right) - \pi, \end{aligned} \tag{3.41}$$

czyli

$$\delta = 4a + \frac{15\pi}{4} a^2 - \frac{3\pi}{4}\left(\frac{q}{m}\right)^2 a^2 + \frac{401}{12} a^3 - \frac{55}{4}\left(\frac{q}{m}\right)^2 a^3. \tag{3.42}$$

Stąd i z (3.37) dostajemy ostatecznie

$$\delta = 4\left(\frac{m}{b}\right) + \left(\frac{15}{4} - \frac{3\pi}{4}\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{128}{3} - 16\left(\frac{q}{m}\right)^2\right)\left(\frac{m}{b}\right)^3, \tag{3.43}$$

zgodnie z wynikiem otrzymanym w [53] (i innych publikacjach).

Zauważmy, że w drugim rzędzie w $\frac{m}{b}$ wkład ładunku do wyrażenia na kąt odchylenia wynika wyłącznie z zależności częstości od amplitudy drgań (taka zależność jest charakterystyczną cechą drgań nieliniowych). Bierze się to stąd, że współczynnik α_3, w którym pojawia się zależność od ładunku, występuje w drugim rzędzie tylko w poprawce do częstości (por. (D.26)).

3.2 Metryka o symetrii aksjalnej

Rozważmy teraz propagację promieni świetlnych w płaszczyźnie równikowej czarnej dziury Kerra. Z równania (2.147) mamy

$$\mathcal{E} = s|\mathcal{E}| = sb, \qquad s = \operatorname{sgn}\mathcal{E}. \tag{3.44}$$

Równanie (2.152) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 = \frac{\left(1 - 2u + \left(\frac{sk}{m}\right)^2 u^2\right)^2}{\left(1 - 2u\left(1 - \frac{sk}{m}\frac{m}{b}\right)\right)^2} &\left[2\left(1 - \frac{sk}{m}\frac{m}{b}\right)^2 u^3 \right. \\ &\left. - \left(1 - \left(\frac{sk}{m}\right)^2\left(\frac{m}{b}\right)^2\right)u^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Bezpośrednie zastosowanie metody Lindstedta–Poincarégo jest utrudnione faktem, że równanie ruchu otrzymane ze zróżniczkowania (3.45) po ϕ zawiera jako współczynniki funkcje małego parametru $\frac{m}{b}$. Można go wyeliminować korzystając z całki energii (3.45). Wtedy jednak pojawią się algebraiczne funkcje u i $\dot{u}$; taka postać równania Lagrange'a wynika też bezpośrednio z formy lagranżjanu (2.144). Można je rozwinąć w szereg potęgowy w u i $\dot{u}$, lecz otrzymane równania, reprezentujące kolejne przybliżenia w parametrze $\frac{m}{b}$, trudno analizować systematycznie metodą Lindstedta–Poincarégo. Postąpimy więc inaczej, rozwijając bezpośrednio prawą stronę (3.45), różniczkując po ϕ i stosując algorytm Lindstedta–Poincarégo.

Zakres ruchu możemy wyznaczyć z warunku $\dot{u} = 0$. Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy oznaczenia

$$\alpha \equiv \frac{sk}{m}, \qquad \beta \equiv \frac{m}{b} \ll 1. \tag{3.46}$$

Równanie (3.45) przyjmuje postać

$$\dot{u}^2 = \frac{\left(1 - 2u + \alpha^2 u^2\right)^2 \left(2\,(1-\alpha\beta)^2 u^3 - (1-\alpha^2\beta^2)u^2 + \beta^2\right)}{\left(1 - 2u(1-\alpha\beta)\right)^2}. \tag{3.47}$$

Warunek $\dot{u} = 0$ implikuje znikanie jednego z dwóch nawiasów w liczniku po prawej stronie (3.47). Znikanie pierwszego prowadzi do wartości r rzędu promienia horyzontu; znikanie drugiego daje $u \sim O\left(\frac{m}{b}\right)$, więc opisuje obszar asymptotyczny. Zatem u należy potraktować jako wielkość rzędu β. Uwzględniając ten fakt i rozwijając prawą stronę (3.47) z dokładnością do wyrazów piątego rzędu w β otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 = {} & 2u^3 - u^2 + \beta^2 + 3\alpha^2\beta^2u^2 - 4\alpha\beta^3u - 2\alpha^2u^4 \\ & + 6\alpha^2\beta^2u^3 - 8\alpha\beta^3u^2. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Różniczkując po ϕ, dostajemy równanie ruchu w postaci

$$\ddot{u} + u = 3u^2 + 3\alpha^2\beta^2u - 2\alpha\beta^3 - 4\alpha^2u^3 + 9\alpha^2\beta^2u^2 - 8\alpha\beta^3u \tag{3.49}$$

lub, oznaczając jak w Dodatku D,

$$\tau \equiv \omega\phi \tag{3.50}$$

$$\omega^2 \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\tau^2} + u = 3u^2 + 3\alpha^2\beta^2u - 2\alpha\beta^3 - 4\alpha^2u^3 + 9\alpha^2\beta^2u^2 - 8\alpha\beta^3u. \tag{3.51}$$

Równanie to różni się od dyskutowanego w Dodatku D tym, że współczynniki stojące przy kolejnych potęgach szukanej funkcji zawierają mały parametr $\beta \equiv \frac{m}{b}$. Podstawowa idea, by uniknąć członów rezonansowych przez nierozwijanie w szereg częstości stojącej w argumencie funkcji trygonometrycznych, pozostaje jednak dalej w mocy. Ulega natomiast modyfikacji układ równań (D.18)–(D.29) (z Dodatku D) wyznaczających kolejne przybliżenia. Aby otrzymać poprawne równania, rozwijamy u i ω w szereg w parametrze β. Ponieważ równanie (3.49) jest przybliżeniem z dokładnością do wyrazów czwartego stopnia, odpowiednie rozwinięcia mają postać

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... \tag{3.52}$$

$$\omega = 1 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + ... \,. \tag{3.53}$$

Parametrem rozwinięcia jest teraz β, a nie amplituda małych drgań, algorytm opisany w Dodatku D ulega więc pewnej modyfikacji: do standardowego rozwiązania równania oscylatorowego rozważanego w n-tym rzędzie przybliżenia dopisujemy rozwiązanie ogólne $A\cos\tau$ równania jednorodnego i wyznaczamy stałą A z całki energii (3.47) wypisanej w $n+1$-szym rzędzie.

Podstawiając (3.52) i (3.53) do (3.51), porównując wyrazy przy β, β^2, β^3 i β^4, nakładając warunek braku członów rezonansowych i wyznaczając współczynnik A z całki energii (3.47) (rozpatrzonej z dokładnością do wyrazów piątego stopnia w β) dostajemy:

$$u_1 = \beta \cos\tau \tag{3.54}$$

$$u_2 = \frac{\beta^2}{2}(3 - \cos(2\tau)) \tag{3.55}$$

$$u_3 = \left(\frac{37}{16} + \frac{3\alpha^2}{8}\right)\beta^3\cos\tau - 2\alpha\beta^3 + \left(\frac{3}{16} + \frac{\alpha^2}{8}\right)\beta^3\cos(3\tau) \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned} u_4 = &- 10\alpha\beta^4\cos\tau + \left(\frac{225}{16} + \frac{21\alpha^2}{8}\right)\left(-6 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)\cos(2\tau) \\ &- \left(\frac{1}{16} + \frac{\alpha^2}{8}\right)\beta^4\cos(4\tau) \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\frac{15}{4}\beta^2, \quad \omega_3 = 10\alpha\beta^3. \tag{3.58}$$

Wracając do pierwotnych oznaczeń, możemy napisać równanie trajektorii promienia świetlnego z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia w $\frac{m}{b}$:

$$\begin{aligned} u = &\frac{m}{b}\cos(\omega\phi) + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{b}\right)^2(3 - \cos(2\omega\phi)) - 2\frac{sk}{m}\left(\frac{m}{b}\right)^3 \\ &+ \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\left(\frac{k}{m}\right)^2\right)\left(\frac{m}{b}\right)^3\cos(3\omega\phi) - 10\frac{sk}{m}\left(\frac{m}{b}\right)^4\cos(\omega\phi) \\ &+ \left(\frac{225}{16} + \frac{21}{8}\left(\frac{k}{m}\right)^2\right)\left(\frac{m}{b}\right)^4 + \left(-6 + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2\right)\cos(2\omega\phi) \\ &- \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\left(\frac{k}{m}\right)^2\right)\left(\frac{m}{b}\right)^4\cos(4\omega\phi) \end{aligned} \tag{3.59}$$

oraz

$$\omega = 1 - \frac{15}{4}\left(\frac{m}{b}\right)^2 + 10\frac{sk}{m}\left(\frac{m}{b}\right)^3. \tag{3.60}$$

Możemy teraz powtórzyć rozumowanie prowadzące do wyznaczenia kąta odchylenia w przypadku metryki sferycznie symetrycznej. Kładąc $y \equiv \cos(\omega\phi_\infty)$

dostajemy:

$$
\begin{aligned}
\beta y + \beta^2(2-y^2) + \left(\frac{37}{16} + \frac{3\alpha^2}{8}\right)\beta^3 y - 2\alpha\beta^3 + \left(\frac{3}{16} + \frac{\alpha^2}{8}\right)\left(4y^3 - 3y\right) \\
-10\alpha\beta^4 y + \left(\frac{225}{16} + \frac{21\alpha^2}{8}\right)\beta^4 + \left(-6 + \frac{\alpha^2}{2}\right)\beta^4(2y^2-1) \\
-\left(\frac{1}{16} + \frac{\alpha^2}{8}\right)\beta^4\left(8y^4 - 8y^2 + 1\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

Powyższe równanie, poprawne z dokładnością do wyrazów czwartego stopnia w β, pozwala wyznaczyć y z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia w β. Jest tak dlatego, że y jest wielkością rzędu β, $y = O(\beta)$, a lewa strona zawiera też wyrazy niezależne od y, stopnia co najwyżej czwartego w β. W rezultacie dostajemy

$$
y = -2\beta + 2\alpha\beta^2 - \left(\frac{25}{2} + 2\alpha^2\right)\beta^3. \tag{3.62}
$$

Kładąc znowu $\omega\phi_\infty = \frac{\pi}{2} + \Delta$, otrzymujemy z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia w β

$$
\Delta = 2\beta - 2\alpha\beta^2 + \left(\frac{83}{6} + 2\alpha^2\right)\beta^3, \tag{3.63}
$$

co pozwala obliczyć kąt odchylenia

$$
\delta = \frac{\pi + 2\Delta}{\omega} - \pi. \tag{3.64}
$$

Korzystając z (3.60) oraz (3.63) i wracając do pierwotnych oznaczeń (por. (3.46)), dostajemy

$$
\begin{aligned}
\delta =& 4\,\frac{m}{b} + \left(\frac{15\pi}{4} - 4\,\frac{sk}{m}\right)\left(\frac{m}{b}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{128}{3} - 10\,\pi\frac{sk}{m} + 4\left(\frac{k}{m}\right)^2\right)\left(\frac{m}{b}\right)^3
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

w pełnej zgodności z wynikiem otrzymanym innymi metodami [49].

Warto zauważyć, że wartości kątów odchylenia dla różnych metryk, zaprezentowane powyżej, otrzymaliśmy metodą czysto algebraiczną, bez konieczności obliczania całek czy rozwijania w szereg Fouriera funkcji eliptycznych.

Rozdział 4

Całkowalna dynamika z zasady Fermata dla metryki Kerra

4.1 Stała Cartera

Poniżej zajmiemy się problemem opisu propagacji promieni świetlnych w metryce Kerra; otrzymane wyniki nietrudno uogólnić na metrykę Kerra–Newmana, lecz dla uproszczenia rozpatrzymy tylko przypadek metryki Kerra. Metrykę Kerra w płaszczyźnie równikowej, wyrażoną przez zmienną u, zdefiniowaną równaniem (3.2), opisują równania (2.138) oraz (2.148)–(2.151). Pełna metryka, nie ograniczona do płaszczyzny równikowej i wyrażona w pierwotnych zmiennych t, r, ϕ, θ ma postać (współrzędne Boyera–Lindquista)

$$\mathrm{d}s^2 = g_{tt}\,\mathrm{d}t^2 + g_{rr}\,\mathrm{d}r^2 + g_{\theta\theta}\,\mathrm{d}\theta^2 + g_{\phi\phi}\,\mathrm{d}\phi^2 + 2g_{t\phi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi \tag{4.1}$$

gdzie

$$g_{tt} = \frac{\Delta - k^2\sin^2\theta}{\rho^2} \tag{4.2}$$

$$g_{rr} = -\frac{\rho^2}{\Delta} \tag{4.3}$$

$$g_{\theta\theta} = -\rho^2 \tag{4.4}$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\sin\theta\left(\Delta k^2\sin^2\theta - (r^2+k^2)^2\right)}{\rho^2} \tag{4.5}$$

$$g_{t\phi} = \frac{-k\sin^2\theta(r^2+k^2-\Delta)}{\rho^2} \tag{4.6}$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2mr + k^2, \qquad \rho^2 \equiv r^2 + k^2\cos^2\theta. \tag{4.7}$$

Trajektorie promieni świetlnych opisują równania Lagrange'a wynikające z funkcji Lagrange'a (2.18), uzupełnione warunkiem (2.7). Lagranżjan (2.18) nie zależy jawnie od parametru afinicznego σ, co prowadzi do zasady zachowania „energii” $E = L$ $(= 0)$; zmienne t i ϕ są cykliczne, więc p_t i p_ϕ są całkami ruchu. Rozważany układ ma 4 stopnie swobody, więc aby był całkowalny w sensie Arnolda–Liouville'a, potrzebna jest jeszcze jedna całka ruchu, pozostająca w inwolucji z pozostałymi (i, oczywiście, funkcjonalnie niezależna) [54]. Całkowalność w sensie Arnolda–Liouville'a gwarantuje, że równania ruchu są rozwiązywalne przez kwadratury.

Czwarta całka ruchu, zwana stałą Cartera, została znaleziona w pracy [40]. Odpowiednie zmienne kąt-działanie analizowano w [55], [56], zaś całkowanie równań ruchu opisano, na przykład, w [57], [58], [59]. Geometryczny sens stałej Cartera opisano w [60], gdzie powiązano ją z istnieniem tensora Killinga. W ramach formalizmu hamiltonowskiego tensor Killinga jest związany z symetrią opisaną przez transformacje kanoniczne nie redukujące się do punktowych.

Wyrażenie na stałą Cartera otrzymano w [40] poprzez separację zmiennych w równaniu Hamiltona–Jacobiego. Standardowo para zmiennych kanonicznie sprzężonych separuje się w równaniu Hamiltona–Jacobiego, jeżeli wchodzi do hamiltonianu w postaci jednej funkcji [52]. Odpowiednia stała separacji jest wtedy całką ruchu. W przypadku całki Cartera sytuacja jest nieco inna. Odpowiedni hamiltonian (we współrzędnych Kerra–Newmana) ma strukturę $H = \frac{h}{\rho^2}$, gdzie h ma formę dopuszczającą standardową separację zmiennych. Równanie Hamiltona–Jacobiego, $H = E$, pomnożone przez ρ^2 przyjmuje formę $h - E\rho^2 = 0$, która pozwala rozdzielić zmienne. W tej postaci można je interpretować jako równanie Hamiltona–Jacobiego dla nowego hamiltonianu $h - E\rho^2$, odpowiadające zerowej energii. Pierwotna energia E wchodzi więc jako parametr do nowego hamiltonianu. Jest to przykład tzw. metamorfozy stałej sprzężenia, wprowadzonej przez Hietarintę i in. w pracy [42] i rozwiniętej w [41]. Poniżej zastosujemy tę metodę do zredukowanej dynamiki, wynikającej z zastosowania zasady Fermata do metryki Kerra.

4.2 Całkowalność dynamiki wynikającej z zasady Fermata

Rozważmy trajektorie promieni świetlnych w metryce Kerra (4.1)-(4.6). Metryka Kerra opisuje stacjonarne pole grawitacyjne, więc formalizm Herglotza sprowadza się do standardowego formalizmu Lagrange'a–Hamiltona. Odpowiednia funkcja Lagrange'a (por. rozdział 2.8) ma postać

$$\mathcal{L} = -G_{t\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma} + \sqrt{\left(G_{t\phi}^2 - G_{\phi\phi}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - G_{rr}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - G_{\phi\phi}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2}, \quad (4.8)$$

gdzie $G_{t\phi} \equiv \frac{g_{t\phi}}{g_{tt}}$, $G_{\phi\phi} \equiv \frac{g_{\phi\phi}}{g_{tt}}$, $G_{rr} \equiv \frac{g_{rr}}{g_{tt}}$, $G_{\theta\theta} \equiv \frac{g_{\theta\theta}}{g_{tt}}$. $\mathcal{L}$, jak wskazano poprzednio, jest jednorodną funkcją prędkości pierwszego stopnia, więc dynamika jest niezmiennicza na reparametryzację. Wygodnym warunkiem cechowania jest, jak wskazaliśmy w rozdziale 2.8, $\sigma = \phi$. Ustalając w ten sposób cechowanie dostajemy z równania (4.8)

$$\mathcal{L} = -G_{t\phi} + \sqrt{\left(G_{t\phi}^2 - G_{\phi\phi}\right) - G_{rr}\dot{r}^2 - G_{\theta\theta}\dot{\theta}^2} \tag{4.9}$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie po ϕ. Otrzymany układ z dwoma stopniami swobody, r i θ, jest niezdegenerowany. Możemy więc w standardowy sposób przejść do formalizmu Hamiltona. Odpowiednie pędy uogólnione mają postać:

$$p_r \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{-G_{rr}\dot{r}}{\sqrt{\left(G_{t\phi}^2 - G_{\phi\phi}\right) - G_{rr}\dot{r}^2 - G_{\theta\theta}\dot{\theta}^2}} \tag{4.10}$$

$$p_\theta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{-G_{\theta\theta}\dot{\theta}}{\sqrt{\left(G_{t\phi}^2 - G_{\phi\phi}\right) - G_{rr}\dot{r}^2 - G_{\theta\theta}, \dot{\theta}^2}} \tag{4.11}$$

zaś hamiltonian przyjmuje formę:

$$\widetilde{\mathcal{H}} \equiv \dot{r}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} = G_{t\phi} - \sqrt{G_{t\phi}^2 - G_{\phi\phi}} \cdot \sqrt{1 + \frac{p_r^2}{G_{rr}} + \frac{p_\theta^2}{G_{\theta\theta}}}. \tag{4.12}$$

Ten dwuwymiarowy układ dynamiczny posiada jedną oczywistą całkę ruchu, hamiltonian $\widetilde{\mathcal{H}}$. Aby wykazać, że układ jest całkowalny w sensie Arnolda–Liouville'a, potrzebujemy jeszcze jednej całki ruchu. Wyjściowy lagranżjan L, równanie (2.18), definiuje w przypadku metryki Kerra układ całkowalny. Całka „energii" $L = 0$ definiuje lagranżjan $\mathcal{L}$, a stosunek pędów uogólnionych, sprzężonych ze zmiennymi cyklicznymi ϕ i t, definiuje całkę $\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathcal{E}}$ (oddzielnie oba pędy zależą od wyboru (z dokładnością do transformacji afinicznej) parametru afinicznego). Pozostaje więc całka ruchu odpowiadająca stałej Cartera [40]. Poszukujemy zatem odpowiednika całki Cartera dla dynamiki zdefiniowanej przez hamiltonian (4.12). Postać hamiltonianu (4.12) nie pozwala bezpośrednio wnioskować, że odpowiednie równanie Hamiltona–Jacobiego dopuszcza rozdzielenie zmiennych. Możemy jednak wykorzystać formalizm opisany w [41], będący uogólnieniem metody metamorfozy stałej sprzężenia [42]. Formalizm wprowadzony w [42] jest opisany w zarysie w Dodatku F.

Punktem wyjścia przy zastosowaniu tego formalizmu do rozważanego tu przypadku jest obserwacja, że hamiltonian $\widetilde{H}$, zdefiniowany równaniem

(4.12), spełnia równanie kwadratowe

$$\widetilde{H}^2 - 2G_{t\phi}\widetilde{H} + G_{\phi\phi} - \left(G_{t\phi}^2 - G_{\phi\phi}\right)\left(\frac{p_r^2}{G_{rr}} + \frac{p_\theta^2}{G_{\theta\theta}}\right) = 0, \tag{4.13}$$

co pozwala wyrazić $\widetilde{\mathcal{H}}$ poprzez $\widetilde{\mathcal{H}}^2$:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \frac{\widetilde{\mathcal{H}}^2}{2G_{t\phi}} + \frac{G_{\phi\phi}}{2G_{t\phi}} - \frac{(G_{t\phi}^2 - G_{\phi\phi})}{2G_{t\phi}}\left(\frac{p_r^2}{G_{rr}} + \frac{p_\theta^2}{G_{\theta\theta}}\right). \tag{4.14}$$

Naszym celem jest zastąpienie wyjściowego hamiltonianu (4.12) poprzez hamiltonian zdefiniowany równaniem (4.14). Zgodnie z rozumowaniem opisanym w Dodatku F, można tego dokonać traktując wyraz $\widetilde{\mathcal{H}}^2$, stojący po prawej stronie równania (4.14), jako parametr (czyli jako stałą sprzężenia). Możemy jednak osiągnąć więcej. Równanie (4.14) staje się osobliwe w granicy Schwarzschilda $k \to 0$, gdyż wtedy $G_{t\phi} \to 0$. Możemy pozbyć się tej osobliwości, stosując nieco bardziej wyrafinowaną formę metamorfozy stałej sprzężenia. W tym celu przepiszmy najpierw równanie (4.14) w jawnej postaci, wykorzystując (4.2)-(4.6):

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}} =& \frac{-\Delta}{2k(r^2+k^2-\Delta)}\left(p_\theta^2 + \frac{\widetilde{\mathcal{H}}^2}{\sin^2\theta} + k^2\sin^2\theta\right)\\ &- \frac{\Delta^2}{2k(r^2+k^2-\Delta)}\left(p_r^2 - \frac{k^2\widetilde{\mathcal{H}}^2}{\Delta^2} - \frac{(r^2+k^2)^2}{\Delta^2}\right).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Zgodnie z rezultatami opisanymi w Dodatku F rozważmy hamiltonian

$$\begin{aligned}\mathcal{H} =& \frac{1}{2}\left(p_r^2 - \frac{k^2\lambda^2}{\Delta^2} - \frac{(r^2+k^2)^2}{\Delta^2}\right) + \frac{1}{2\Delta}\left(p_\theta^2 + \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta} + k^2\sin^2\theta\right)\\ &+ \frac{\lambda k(r^2+k^2-\Delta)}{\Delta^2} + \lambda.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Kładąc $\lambda = \widetilde{\mathcal{H}}$ i rozwiązując równanie (F.3) otrzymujemy na mocy (4.14) wyjściowy hamiltonian $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Zgodnie z wynikami pracy [41], niesparametryzowane trajektorie dla metryki Kerra, opisane hamiltonianem (4.12), pokrywają się z trajektoriami wyznaczonymi przez hamiltonian (4.16), pod warunkiem, że:

(i) po wypisaniu równań kanonicznych dla $\mathcal{H}$ kładziemy $\lambda = \widetilde{\mathcal{E}}$;

(ii) rozważamy ruch na podrozmaitości $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{E}}$.

Co więcej, możemy również związać parametry ewolucji dla $\widetilde{\mathcal{H}}$ i $\mathcal{H}$. Dla wyjściowego hamiltonianu parametrem ewolucji jest kąt azymutalny ϕ. Oznaczamy przez ψ parametr ewolucji dla $\mathcal{H}$. Wtedy, zgodnie z rezultatem otrzymanym w [41] (por. (F.9), (F.10))

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\psi} \equiv \Omega = 1 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \widetilde{\mathcal{H}}} = \lambda\left(-\frac{1}{\Delta \sin^2\theta} + \frac{k^2}{\Delta^2}\right) - \frac{k(r^2+k^2-\Delta)}{\Delta^2}. \quad (4.17)$$

Łatwo teraz wyprowadzić wyrażenie dla odpowiednika stałej Cartera. Odwołując się ponownie do rezultatów [41] stwierdzamy, że istnieje jednoznaczna odpowiedniość między całkami ruchu dla $\mathcal{H}$ i $\widetilde{\mathcal{H}}$, jeśli w tych pierwszych dokonamy podstawienia $\lambda \to \widetilde{\mathcal{H}}$.

$\mathcal{H}$ ma standardową postać dopuszczającą rozdzielenie zmiennych [52]. Wnioskujemy więc, że odpowiednik stałej Cartera ma postać

$$C = p_\theta^2 + \frac{\widetilde{\mathcal{H}}^2}{\sin^2\theta} + k^2\sin^2\theta. \quad (4.18)$$

Przypomina on oryginalną stałą Cartera, lecz p_θ odnosi się tutaj do pędu zdefiniowanego względem ψ jako parametru ewolucji. Można pokazać, że otrzymana całka ruchu jest proporcjonalna do oryginalnej stałej Cartera.

4.3 Granica Schwarzschilda

Jak już zauważyliśmy, hamiltonian $\mathcal{H}$, dany równaniem (4.16), dopuszcza regularną granicę $k \to 0$. Otrzymujemy wtedy

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 - \frac{r^4}{\Delta^2}\right) + \frac{1}{2\Delta}\left(p_\theta^2 + \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}\right) + \lambda. \quad (4.19)$$

Pisząc kanoniczne równania Hamiltona dla θ i p_θ przekonujemy się, że $\theta = \frac{\pi}{2}$, $p_\theta = 0$ jest ich rozwiązaniem. Pozostałe równania mają postać

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi} = p_r \quad (4.20)$$

$$\frac{\mathrm{d}p_r}{\mathrm{d}\psi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda^2}{2\Delta} - \frac{r^4}{2\Delta^2}\right). \quad (4.21)$$

Co więcej, ponieważ stała addytywna w (4.16) jest równa $\widetilde{E}$, dostajemy

$$\frac{1}{2}p_r^2 + \left(\frac{\lambda^2}{2\Delta} - \frac{r^4}{2\Delta^2}\right) = 0 \quad (4.22)$$

lub, wobec (4.20):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi}\right)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{2\Delta} - \frac{r^4}{2\Delta^2}\right) = 0. \tag{4.23}$$

Równanie (4.17) dla $k = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ daje:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\psi} = -\frac{\lambda}{\Delta}. \tag{4.24}$$

Wstawiając (4.24) do (4.23) dostajemy:

$$\frac{\lambda^2}{2\Delta^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{2\Delta} - \frac{r^4}{2\Delta^2} = 0. \tag{4.25}$$

W terminach zmiennej u, (4.25) przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + (u^2 - 2u^3) = \frac{m^2}{\lambda^2}. \tag{4.26}$$

Na końcu musimy położyć $\lambda = \widetilde{E}$, a na mocy (2.147) $|\widetilde{\mathcal{E}}| = b$. Uwzględniając ten fakt wnioskujemy, że (4.26) jest równaniem dla trajektorii promieni świetlnych w metryce Schwarzschilda (równanie (3.9)).

W przypadku metryki o symetrii aksjalnej nie można bez zmniejszenia ogólności założyć, że $\theta = \frac{\pi}{2}$. W związku z tym jest rzeczą interesującą prześledzić, jak w granicy Schwarzschilda pojawiają się rozwiązania odpowiadające dowolnemu położeniu płaszczyzny ruchu. Odpowiednie całki ruchu mają postać:

$$p_\theta^2 + \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta} = C \tag{4.27}$$

$$\frac{1}{2}\left(p_r^2 - \frac{r^4}{\Delta^2}\right) + \frac{C}{2\Delta} = 0. \tag{4.28}$$

Rozważmy pierwsze równanie. Równanie kanoniczne Hamiltona implikuje $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\psi} = \frac{p_\theta}{\Delta}$, więc (4.27) daje

$$\Delta^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\psi}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta} = C. \tag{4.29}$$

Biorąc pod uwagę (4.17), w granicy $k \to 0$ dostajemy

$$\frac{1}{\sin^4\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\psi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{C}{\lambda^2}, \tag{4.30}$$

z rozwiązaniem ogólnym

$$\operatorname{ctg}\theta = \sqrt{\frac{C}{\lambda^2} - 1}\ \sin(\phi - \phi_0) \tag{4.31}$$

lub, we współrzędnych kartezjańskich:

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = 0, \qquad \vec{a} = \left(-\sqrt{\frac{C}{\lambda^2} - 1} \sin\phi_0, \sqrt{\frac{C}{\lambda^2} - 1} \cos\phi_0, -1 \right). \tag{4.32}$$

W szczególności, $\phi_0 = 0$ odpowiada wyborowi przecięcia płaszczyzny ruchu z płaszczyzną (12) jako pierwszej osi układu współrzędnych.
Równanie (4.28) można przepisać jako

$$\frac{1}{\sin^4\theta} \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} \right)^2 + \frac{C}{\lambda^2} u^2 (1 - 2u) = \frac{m^2}{\lambda^2}. \tag{4.33}$$

Z (4.31) otrzymujemy, kładąc $\phi_0 = 0$,

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \left(\frac{C}{\lambda^2} - 1 \right) \sin^2\phi + 1. \tag{4.34}$$

Podstawiając (4.34) do (4.33) i rozdzielając zmienne, mamy

$$\int_0^{u_1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{C}{\lambda^2} u^2 (1 - 2u)}} = \int_{\phi_1}^{\phi_\infty} \frac{\mathrm{d}\phi}{1 + \left(\frac{C}{\lambda^2} - 1 \right) \sin^2\phi}, \tag{4.35}$$

gdzie $u_1 = u(\phi_1)$ odpowiada największemu zbliżeniu do centrum:

$$\frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{C}{\lambda^2} u_1^2 (1 - 2u_1) = 0. \tag{4.36}$$

Prawa strona (4.35) może być wyrażona przez funkcje elementarne. Lewa strona daje się wyrazić przez funkcje eliptyczne. W obszarze słabego odchylenia, $\frac{m}{\lambda} \ll 1$, można ją rozwinąć w szereg potęgowy w $\frac{m}{\lambda}$ [53]. W najniższym rzędzie w $\frac{m}{\lambda}$ dostajemy z (4.35):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{\frac{\lambda^2}{C}} \frac{m}{|\lambda|} \right) = \frac{\sqrt{\frac{C}{\lambda^2}} \operatorname{tg}\phi_\infty - \sqrt{\frac{C}{\lambda^2}} \operatorname{tg}\phi_1}{1 + \frac{C}{\lambda^2} \operatorname{tg}\phi_\infty \cdot \operatorname{tg}\phi_1}. \tag{4.37}$$

Z równania (4.31) wynika (dla $\phi_0 = 0$, tzn. wspólnej dla płaszczyzny ruchu i płaszczyzny (12) osi 1), że kąt azymutalny ϕ jest związany z kątem azymutalnym ϕ', mierzonym w płaszczyźnie ruchu, relacją

$$\operatorname{tg}\phi' = \sqrt{\frac{C}{\lambda^2}} \operatorname{tg}\phi. \tag{4.38}$$

Zatem z równania (4.37) otrzymujemy

$$\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{\frac{\lambda^2}{C}}\frac{m}{|\lambda|} = \phi'_\infty - \phi'_1. \tag{4.39}$$

W końcu zauważamy, że parametr zderzenia b jest proporcjonalny do całkowitego momentu pędu, $p_{\phi'}$, podczas gdy $\lambda = \widetilde{\mathcal{E}}$ jest proporcjonalne do rzutu p_ϕ całkowitego momentu pędu na trzecią oś. Stąd

$$|\lambda|\sqrt{\frac{C}{\lambda^2}} = b. \tag{4.40}$$

Szczegółowy dowód tej relacji podajemy poniżej. (4.39) i (4.40) prowadzą do standardowego wzoru na kąt odchylenia w metryce Schwarzschilda:

$$\delta \simeq 4\left(\frac{m}{b}\right). \tag{4.41}$$

Dla udowodnienia relacji (4.40) napiszmy odpowiednik lagranżajnu (2.79) uwzględniający nietrywialną dynamikę kąta θ:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\Bigg(B(r)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - A(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 \\ -r^2 D(r)\left(\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Zachowujące się pędy uogólnione p_t i p_ϕ, odpowiadające zmiennym cyklicznym t i ϕ, mają postać

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)} = -r^2 D(r)\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma} \tag{4.43}$$

$$p_t \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)} = B(r)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}. \tag{4.44}$$

Stąd

$$\frac{p_\phi}{p_t} = \frac{-r^2 D(r)\sin^2\theta}{B(r)}\frac{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}}. \tag{4.45}$$

Z kolei zredukowany Lagranżjan (2.40) wygląda następująco:

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\phi} = \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{r^2 D(r)}{B(r)}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \sin^2\theta\right)}. \tag{4.46}$$

Standardowo $\mathcal{L}$ nie zależy od parametru ewolucji ϕ, więc „energia"

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \dot{r}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} + \dot{\theta}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \mathcal{L} = \frac{-\frac{r^2D(r)}{B(r)}\sin^2\theta}{\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}\dot{r}^2 + \frac{r^2D(r)}{B(r)}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\right)}} \tag{4.47}$$

jest całką ruchu; kropka w powyższych wzorach oznacza, jak poprzednio, różniczkowanie po kącie ϕ. Porównując (4.45), (4.46) i (4.47) wnioskujemy, że

$$\frac{p_\phi}{p_t} = \widetilde{\mathcal{E}}(=\lambda). \tag{4.48}$$

Wprowadźmy współrzędne sferyczne (ϕ', θ'), odpowiadające płaszczyźnie ruchu jako nowej płaszczyźnie (12). Z niezmienniczości L na obroty dostajemy, uwzględniając, że $\theta' = \frac{\pi}{2}$:

$$L = \frac{1}{2}\left(B(r)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - A(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - r^2D(r)\left(\frac{\mathrm{d}\phi'}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2\right). \tag{4.49}$$

Wykorzystując równanie (4.31), wyznaczające płaszczyznę ruchu wnioskujemy, że

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 = \left(\frac{C}{\lambda^2}\right)\sin^4\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2. \tag{4.50}$$

Porównując równania (4.42) i (4.49) dostajemy

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi'}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 = \frac{C}{\lambda^2}\sin^4\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2. \tag{4.51}$$

Z drugiej strony

$$p_{\phi'} = -r^2D(r)\left(\frac{\mathrm{d}\phi'}{\mathrm{d}\sigma}\right) \tag{4.52}$$

oraz, z (4.51) i (4.43):

$$p_{\phi'} = -r^2D(r)\sqrt{\frac{C}{\lambda^2}}\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right) = \sqrt{\frac{C}{\lambda^2}}\,p_\phi. \tag{4.53}$$

Stąd, ostatecznie

$$b = \left|\frac{p_{\phi'}}{p_t}\right| = \sqrt{\frac{C}{\lambda^2}}\left|\frac{p_\phi}{p_t}\right| = \sqrt{\frac{C}{\lambda^2}}\,|\mathcal{E}| = \sqrt{\frac{C}{\lambda^2}}\,|\lambda|. \tag{4.54}$$

4.4 Promienie świetlne w płaszczyźnie równikowej metryki Kerra

Hamiltonian (4.15) prowadzi do następujących całek ruchu:

$$p_\theta^2 + \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta} + k^2 \sin^2\theta = C \tag{4.55}$$

$$\frac{1}{2}\left(p_r^2 - \frac{k^2\lambda^2}{\Delta^2} - \frac{(r^2+k^2)^2}{\Delta^2}\right) + \frac{C}{2\Delta} - \lambda\frac{k(r^2+k^2-\Delta)}{\Delta^2} = 0; \tag{4.56}$$

całka (4.56) przyjmuje wartość zerową, gdyż zgodnie z punktem (ii) naszego przepisu, musimy na końcu położyć $\lambda = \widetilde{\mathcal{E}}$.
Równania kanoniczne wynikające z hamiltonianu (4.16) implikują:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi} = p_r \tag{4.57}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\psi} = \frac{p_\theta}{\Delta}. \tag{4.58}$$

Eliminując za pomocą (4.57) i (4.58) pędy uogólnione, wchodzące do (4.55) i (4.56) i zastępując pochodne po parametrze ewolucji ψ przez pochodne po kącie azymutalnym ϕ, równanie (4.17), dostajemy układ dwóch równań pierwszego rzędu, którego rozwiązania wyznaczają trajektorie promieni świetlnych, $r = r(\phi)$, $\theta = \theta(\phi)$. W terminach θ i zmiennej u, zdefiniowanej równaniem (3.2), mają one postać:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\frac{k^2}{m^2}\ u^2 - 2\ \frac{m}{\lambda}\ \frac{k}{m}\ u}{1-2u+k^2\ u^2}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\\ &+ \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 \frac{k^2}{m^2}\sin^2\theta = \frac{C}{\lambda^2}\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\frac{k^2}{m^2}\ u^2 + 2\ \frac{m}{\lambda}\ k\ u}{1-2u+\frac{k^2}{m^2}\ u^2}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 (1+\frac{k^2}{m^2}u^2)^2\\ &- \frac{k^2u^4}{m^2} + \frac{C}{\lambda^2}\ u^2(1-2u+\frac{k^2}{m^2}u^2) + 4\left(\frac{m}{\lambda}\right)\frac{k}{m}\ u^3 = 0.\end{aligned} \tag{4.60}$$

Definiując nowy parametr ewolucji $\widetilde{\psi}$ taki, że:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}} = \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\frac{k^2}{m^2}u^2 - 2\frac{m}{\lambda}\frac{ku}{m}}{1-2u+\frac{k^2}{m^2}u^2}\right), \tag{4.61}$$

dostajemy dwa rozseparowane równania dla θ i u. Zauważmy, że parametr ewolucji ψ spełnia w naszym formalizmie rolę czasu Mino [43].

Zastosujmy równania (4.59), (4.60) do przypadku trajektorii w płaszczyźnie równikowej. Podstawiając w (4.59) $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$ dostajemy warunek na stałą Cartera:

$$\frac{C}{\lambda^2} = 1 + \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 \frac{k^2}{m^2}. \tag{4.62}$$

Równanie (4.60) przyjmuje teraz postać

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{\frac{k^2}{m^2}u^2 - 2\,\frac{m}{\lambda}\,\frac{k}{m}\,u}{1 - 2u + k^2u^2}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 (1 + k^2u^2)^2 - \frac{k^2}{m^2}u^4 \\
&+ \left(1 + \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 \frac{k^2}{m^2}\right) u^2(1 - 2u + \frac{k^2}{m^2}u^2) + 4\,\left(\frac{m}{\lambda}\right)\left(\frac{k}{m}\right)\, u^3 = 0,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

co, jak łatwo sprawdzić, jest równoważne (3.47).

4.5 Całkowanie dowolnych trajektorii

Jak wspomniano powyżej, wprowadzenie pomocniczego parametru ewolucji, odpowiednika czasu Mino, prowadzi do zupełnego rozseparowania równań ruchu. Uwzględniając (4.61), równania (4.59) i (4.60) można napisać w postaci:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} + \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 \frac{k^2}{m^2}\sin^2\theta = \frac{C}{\lambda^2} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}}\right)^2 - \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 (1 + \frac{k^2}{m^2}u^2)^2 - \frac{k^2}{m^2}u^4 + \left(\frac{C}{\lambda^2}\right) u^2(1 - 2u + \frac{k^2}{m^2}u^2) \\
&+ 4\left(\frac{m}{\lambda}\right)\left(\frac{k}{m}\right)\, u^3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Równania (4.64), (4.65) i (4.61) wyznaczają trajektorie promieni świetlnych w metryce Kerra. Wszystkie dają się scałkować przez rozdzielenie zmiennych (równanie (4.61) rozwiązujemy na końcu przez zwykłe całkowanie). Oczywiście, w wyniku otrzymamy znane wzory na trajektorie światła w metryce Kerra [57–59]. Warto natomiast zauważyć, że otrzymane równania są wygodnym punktem wyjściowym do rozwinięcia w odwrotności parametru zderzenia.

Równania (4.61), (4.64) i (4.65) nie zależą jawnie od parametru $\widetilde{\psi}$. Możemy więc wybrać go tak, by punkt $\widetilde{\psi} = 0$ odpowiadał minimalnemu zbliżeniu do centrum. Co więcej, symetria aksjalna pozwala na położenie $\phi(\widetilde{\psi} = 0) = 0$.

Mamy więc następujące warunki początkowe dla równań (4.61), (4.64) i (4.65):

$$u(\widetilde{\psi}=0)=u_{max} \tag{4.66}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}}(\widetilde{\psi}=0)=0 \tag{4.67}$$

$$\phi(\widetilde{\psi}=0)=0 \tag{4.68}$$

$$\theta(\widetilde{\psi}=0)=\theta_0 \tag{4.69}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}}(\widetilde{\psi}=0)=\dot{\theta}_0. \tag{4.70}$$

Rozważmy najpierw równanie (4.64). Z warunków początkowych otrzymujemy:

$$\dot{\theta}_0^2+\frac{1}{\sin^2\theta_0}+\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2\left(\frac{k}{m}\right)^2\sin^2\theta_0=\frac{C}{\lambda^2}=C_0+C_1\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2\left(\frac{k}{m}\right)^2, \tag{4.71}$$

gdzie

$$C_0\equiv\dot{\theta}_0^2+\frac{1}{\sin^2\theta_0}\geq 1 \tag{4.72}$$

$$0\leq C_1\equiv\sin^2\theta_0\leq 1. \tag{4.73}$$

We wzorze (4.72) równość zachodzi tylko dla $\theta_0=\frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}_0=0$, tzn. dla ruchu w płaszczyźnie równikowej, który rozpatrzyliśmy poprzednio. Kładąc

$$y\equiv f\cos\theta,\quad f\equiv\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{m}{\lambda}\right) \tag{4.74}$$

dostajemy z (4.64)

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}}\right)^2+\left(\delta+\varepsilon f^2\right)y^2+y^4=(\alpha-1)\,f^2+(\beta+1)\,f^4; \tag{4.75}$$

$$\delta\equiv C_0>1,\quad -1\geq\varepsilon\equiv C_1-2\geq -2. \tag{4.76}$$

Różniczkując (4.75) po $\widetilde{\psi}$, otrzymujemy równanie ruchu dla kąta θ:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}^2}+\left(\delta+\varepsilon f^2\right)y+2y^3=0. \tag{4.77}$$

Dla dużych wartości parametru zderzenia, $f\ll 1$, równania (4.76) i (4.77) opisują małe drgania nieliniowe. Zauważmy, że oba równania zależą tylko od parametru $f = k\frac{m}{\lambda}$,który znika albo dla $k \to 0$, albo dla $\lambda \to \infty$. W pierwszym przypadku otrzymujemy metrykę sferycznie symetryczną, w drugim — płaską. W obu przypadkach krzywe geodezyjne są płaskie.

Równanie (4.77) z warunkiem (4.76) można rozwiązać standardową metodą Lindstedta–Poincaré. Powtarzając opisane już kilkukrotnie kroki, otrzymamy, z dokładnością do wyrazów kwadratowych w $\frac{m}{f}$:

$$\cos\theta = \left(A + Bf^2\right)\cos(\omega(\widetilde{\psi} + \widetilde{\psi}_0)) + \frac{B^3 f^2}{16\delta}\cos^3(\widetilde{\psi} + \widetilde{\psi}_0) \tag{4.78}$$

$$\omega = \sqrt{\delta} + \frac{1}{2\sqrt{\delta}}\left(\varepsilon + \frac{3}{2}A^2\right)f^2 \tag{4.79}$$

$$A = \sqrt{\frac{\delta - 1}{\delta}}, \quad B = \frac{\frac{\varepsilon}{\delta} + 1 - \frac{9}{8}\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)^2}{2\sqrt{\delta(\delta-1)}}. \tag{4.80}$$

Wartość parametru $\widetilde{\psi}_0$ możemy znaleźć wykorzystując relacje (4.73), (4.76):

$$\varepsilon = -1 - \cos^2\theta_0. \tag{4.81}$$

Rozwiązanie (4.78) zależy więc od dwóch stałych, δ i ε, wyznaczonych przez warunki początkowe (4.69), (4.70).

W podobny sposób możemy rozwiązać równanie (4.65). We wprowadzonych wyżej oznaczeniach przybiera ono postać:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}}\right)^2 + \left(\delta + \varepsilon f^2\right)u^2 - 2\left(\delta - 2f + (\varepsilon+2)f^2\right)u^3 \\ +k^2\left(\delta - 1 + (\varepsilon+1)f^2\right)u^4 = \left(\frac{m}{k}\right)^2 f^2,\end{aligned} \tag{4.82}$$

co po zróżniczkowaniu daje równanie ruchu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\widetilde{\psi}^2} + \left(\delta + \varepsilon f^2\right)u - 3\left(\delta - 2f + (\varepsilon+2)f^2\right)u^2 \\ +2\frac{k}{m}^2\left(\delta - 1 + (\varepsilon+1)f^2\right)u^3 = 0.\end{aligned} \tag{4.83}$$

Ponownie widzimy, że dla małych f, $f \ll 1$, otrzymujemy równanie opisujące małe drgania nieliniowe, przy czym $u = O(f)$.
Stosując ponownie algorytm Lindstedta–Poincarégo możemy znaleźć rozwi-

nięcie perturbacyjne rozwiązania. Pierwsze wyrazy rozwinięcia mają postać:

$$
\begin{aligned}
u = & \left(D\cos(\Omega\widetilde{\psi})\right) + \left(\frac{D^2}{2}(3-\cos(2\Omega\widetilde{\psi}))\right) \\
& + \frac{3fD^2}{\delta} - \frac{fD^2}{\delta}\cos(2\Omega\widetilde{\psi}) + \left(\frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2(\delta-1)}{16\,\delta} + \frac{3}{16}\right)D^3\cos(3\Omega\widetilde{\psi}) \\
& + \left(\frac{37}{16}D^3 - \frac{9\left(\frac{k}{m}\right)^2(\delta-1)}{16\,\delta}D^3 - \frac{\varepsilon f^2 D}{2\,\delta}\right)\cos(\Omega\widetilde{\psi}) \qquad (4.84)\\
\Omega = & \sqrt{\delta} + \frac{1}{2\sqrt{\delta}}\left(\varepsilon f^2 + \left(-\frac{15}{2}\delta + \frac{3\left(\frac{k}{m}\right)^2(\delta-1)}{2}\right)D^2\right) \qquad (4.85)\\
D = & \left(\frac{m}{k}\right)\frac{f}{\sqrt{\delta}}. \qquad (4.86)
\end{aligned}
$$

Warunek brzegowy (4.67) jest automatycznie uwzględniony w formie rozwiązania (4.84). Z kolei stała dowolna u_{max} jest jednoznacznie związana z parametrem λ.
Mając jawną postać funkcji $\theta = \theta(\widetilde{\psi})$, $u = u(\widetilde{\psi})$, możemy znaleźć zależność $\phi = \phi(\widetilde{\psi})$ całkując równanie (4.61) i wykorzystując warunek (4.68):

$$
\phi = \int_0^{\widetilde{\psi}} \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2 u^2 - 2fu}{1-2u+\left(\frac{k}{m}\right)^2 u^2}\right) \mathrm{d}\widetilde{\psi}. \qquad (4.87)
$$

Łącząc technikę opisaną w [41] z rozwinięciem Lindstedta–Poincaré, możemy więc otrzymać rozwinięcie dowolnej geodezyjnej zerowej w parametrze $\frac{m}{\lambda}$. Do znalezienia kolejnych rzędów rozwinięcia wystarczą proste operacje algebraiczne, bez potrzeby odwoływania się do teorii funkcji eliptycznych. Łatwo również pokazać, że podstawowa relacja wiążąca $\lambda = \widetilde{\varepsilon}$ z $\frac{p_\phi}{p_t}$ (por. (4.48)) pozostaje prawdziwa również dla nierównikowych orbit w metryce Kerra.

Rozdział 5

Zastosowanie zasady Fermata do zamkniętych trajektorii światła

Rozważmy asymptotycznie płaską czasoprzestrzeń opisującą stałe pole grawitacyjne. Wtedy zasada Fermata jest równoważna standardowej zasadzie wariacyjnej formalizmu Lagrange'a z lagranżjanem (2.12). Z drugiej strony, można ją zapisać (por. (2.10)) jako

$$\delta \int \mathrm{d}x^0 = 0. \tag{5.1}$$

Oznacza to, że trajektoria promienia świetlnego jest taką krzywą, że czas potrzebny światłu do jej przemierzenia, mierzony przez obserwatora w nieskończoności, jest stacjonarny ze względu na wariacje tej krzywej o ustalonych końcach. Tak sformułowana zasada prowadzi do interesujących wniosków, szczególnie w przypadku zamkniętych trajektorii świetlnych.

Rozważmy metrykę Kerra i trajektorie kołowe w płaszczyźnie równikowej. W pracy [61] pokazano, że jeżeli wybierzemy dowolny okrąg w płaszczyźnie równikowej i założymy, że obiegamy go z prędkością światła (mierzoną w układzie lokalnie inercjalnym), to czas obiegu będzie najmniejszy, jeśli jest to rzeczywista trajektoria promienia świetlnego. Dowód tej interesującej własności w ramach dyskutowanego tu formalizmu jest bardzo prosty [62]. Załóżmy, że mamy zadaną trajektorię promienia świetlnego, będącą krzywą zamkniętą. Rozważmy infinitezymalne deformacje tej krzywej, będące również krzywymi zamkniętymi. Zgodnie z (5.1), czas obiegu światła wzdłuż takiej krzywej będzie stacjonarny ze względu na powyższe deformacje. Dzieje się tak dlatego, że wkłady od członów brzegowych (w ogólnym przypadku znikające wskutek ustalenia punktów końcowych krzywej) kasują się z warunku periodyczności. W szczególności, dla kołowej trajektorii promienia świetlnego w płaszczyźnie równikowej metryki Kerra, ten czas jest stacjonarny w porównaniu z czasem obiegu, z prędkością światła, wzdłuż sąsiednich koncentrycznych okręgów.

Odwrotnie, jeśli ten czas jest stacjonarny, to dany okrąg jest trajektorią promienia świetlnego. Przepiszemy (5.1) w postaci

$$\delta \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\phi}\, \mathrm{d}\phi = 0. \tag{5.2}$$

Rozwiązując $\mathrm{d}s^2 = 0$ dla metryki Kerra, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\phi} = F\left(r, \sin^2\theta, \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}\right)^2, \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\right). \tag{5.3}$$

Zatem wariacja wyrażenia podcałkowego względem θ znika dla $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$, zaś wariacja względem r jest stała na każdym okręgu $r = const$. Wystarczy więc rozważać wariacje z $\delta r = const$; wariacji ϕ nie musimy rozpatrywać, gdyż jest to parametr ewolucji (równoważnie: $\phi \to \phi + \delta\phi$ opisuje „wzbudzenia" będące czystym cechowaniem). Ponieważ czarna dziura Kerra ma jedną kołową trajektorię świetlną, dostajemy prosty dowód własności sformułowanej w [61]. Zauważmy, że trajektorie obiegu w płaszczyźnie równikowej metryki Kerra rozpadają się na dwie klasy, zależnie od tego, czy kierunek obiegu jest zgodny czy przeciwny do kierunku obrotu czarnej dziury. Powyższy argument stosuje się do każdej klasy z osobna.

Rozdział 6

Uwagi końcowe

Niniejsza rozprawa jest poświęcona kręgowi zagadnień związanych z rolą zasady Fermata w opisie propagacji światła w obecności pola grawitacyjnego. W przypadku niezależnego od czasu pola grawitacyjnego stosunkowo łatwo sformułować zasadę Fermata. Jej uogólnienie na dowolne pole grawitacyjne zaproponowali Kovner, Nityananda, Samuel i Perlick. Alternatywna propozycja, którą przedstawiamy, jest oparta na prostym twierdzeniu, wiążącym dynamikę lagranżowską, opisaną lagranżjanem jednorodnym stopnia drugiego w prędkościach uogólnionych, z dynamiką na zredukowanej (poprzez pominięcie jednej współrzędnej uogólnionej) przestrzeni konfiguracyjnej. Tak zredukowana dynamika opisywana jest przez uogólnioną zasadę wariacyjną Herglotza. Stosując to twierdzenie do kwadratowego lagranżjanu, opisującego linie geodezyjne, otrzymujemy ogólną postać zasady Fermata w polu grawitacyjnym. To sformułowanie jest najbliższe propozycji Frolova opartej na zasadzie minimum Pontriagina.

Warto zauważyć, że zaproponowane podejście można zmodyfikować, wybierając do eliminacji zamiast x^0 inną zmienną, np. x^3. Otrzymamy wtedy „zasadę Fermata", opisującą trajektorię promienia świetlnego zrzutowaną na współrzędne x^0, x^1, x^2.

Rozważyliśmy następnie trajektorie promieni świetlnych w obszarze dużej wartości parametru zderzenia. Równania wyznaczające taką trajektorię (lub jedno z nich, w przypadku metryk o niższej symetrii), opisują wtedy małe drgania nieliniowe. Można więc zastosować dobrze rozwinięte metody teorii drgań nieliniowych. W szczególności, dla otrzymania poprawnych przybliżeń rozwiązań dokładnych, można zastosować formalizm Lindstedta–Poincarégo. Pokazaliśmy, że prowadzi to szybko do eleganckich wyrażeń przybliżonych na trajektorie promieni świetlnych, oddające również poprawnie jakościowe cechy takich trajektorii. Na przykład, trajektorie w metryce Schwarzschilda opisane są równaniem (3.11), które dla małych wartości u jest równaniem drgań nieliniowych wokół lokalnego minimum potencjału. Trajektoria promienia świetlnego odpowiada obszarowi $u > 0$, co nie zmienia faktu, że należy uwzględnić cały zakres u dla poprawnego opisu rozwiązania. Naiwne rozwinięcie perturbacyjne nie ma tych zalet; zawiera, oprócz funkcji trygonometrycznych, wielomiany w kącie azymutalnym. Pojawiają się one, gdyż w argumentach funkcji trygonometrycznych występują wielokrotności częstości oscylatora niezaburzonego; tymczasem charakterystyczną cechą drgań nieliniowych jest zależność częstości drgań od ich amplitudy. W istocie, jak pokazaliśmy np. w rozdziale (3.1), poprawki drugiego rzędu do kąta odchylenia promienia świetlnego pochodzą od zależności częstość - amplituda.

Broniąc tezy, że zasada Fermata dostarcza wyjątkowo użytecznego narzędzia do analizy propagacji światła w polu grawitacyjnym, często poręczniejszego niż równania zerowych geodezyjnych, napotykamy na następujący problem: efektywny hamiltonian, pojawiający się w formalizmie kanonicznym związanym z zasadą Fermata, jest zwykle bardziej skomplikowany niż wyjściowy hamiltonian opisujący trajektorie geodezyjne (por. np. (4.12)). Powoduje to, że pewne własności propagacji światła (np. całkowalność odpowiedniej dynamiki), stosunkowo łatwe do udowodnienia w formalizmie związanym z pierwotnym hamiltonianem, mogą być zupełnie nieoczywiste z punktu widzenia zasady Fermata. W przypadku metryki Kerra, dla której, jak wykazał Carter, równania geodezyjnych (nie tylko zerowych) są całkowalne w sensie Arnolda-Liouville'a, całkowalność dwuwymiarowego układu dynamicznego, opisującego zasadę Fermata, nie wydaje się oczywista. Pokazaliśmy jednak, wykorzystując rezultaty pracy o tzw. uogólnionej metamorfozie stałej sprzężenia, jak zamienić hamiltonian Fermata na prostszy, o postaci dopuszczającej standardową separację zmiennych, a więc w oczywisty sposób opisujący układ całkowalny. W końcu, pokazaliśmy jak można wykorzystać zasadę Fermata do wyprowadzenia interesującej własności kołowych trajektorii świetlnych w czasoprzestrzeni Kerra.

Opisane w rozprawie wyniki można uogólnić na różne sposoby. Zasada Fermata dla zależnych od czasu pól grawitacyjnych wymaga zastąpienia standardowego formalizmu mechaniki analitycznej przez formalizm Herglotza. Oba mają wiele cech wspólnych, co pozwala przypuszczać, że ogólna zasada Fermata może znaleźć kolejne interesujące zastosowania.

Dodatek A

Zasada wariacyjna Herglotza

Równania ruchu klasycznej mechaniki newtonowskiej można sformułować używając formalizmu Lagrange'a. Podstawowym pojęciem jest tutaj lagranżjan L, będący funkcją współrzędnych uogólnionych $\vec{q} \equiv \left(q^1, ..., q^f\right)$, prędkości uogólnionych $\dot{\vec{q}} \equiv \left(\dot{q}^1, ...\dot{q}^f\right)$ oraz, ewentualnie, czasu:

$$L = L\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t\right); \tag{A.1}$$

dodatkowo zakładamy zwykle (choć nie jest to konieczne), że $\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right] \neq 0$. W dalszym ciągu założymy, dla uproszczenia notacji, że mamy do czynienia z jednym stopniem swobody, $f = 1$; uogólnienie na przypadek $f > 1$ jest natychmiastowe.

Niech $\langle t_0, t_1 \rangle$ będzie dowolnym przedziałem czasu. Dla dowolnej krzywej $q = q(t)$, $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$, w przestrzeni konfiguracyjnej, definiujemy działanie $S[q]$

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)\, \mathrm{d}t + S_0, \tag{A.2}$$

gdzie S_0 jest dowolną (ustaloną) stałą. Równania dynamiczne (równania Lagrange'a II rodzaju) otrzymujemy z żądania stacjonarności funkcjonału $S[q]$ względem wariacji krzywej $q = q(t)$ o ustalonych końcach,

$$\delta S[q] = 0, \qquad \delta q(t_0) = 0 = \delta q(t_1). \tag{A.3}$$

Powyższą zasadę wariacyjną można sformułować w następujący równoważny sposób. Dla ustalonej krzywej $q = q(t)$ rozważamy równanie różniczkowe

$$\dot{S} = L(q(t), \dot{q}, t) \tag{A.4}$$

z warunkiem początkowym

$$S(t_0) = S_0. \tag{A.5}$$

Fizyczną trajektorię otrzymujemy z żądania stacjonarności rozwiązania zagadnienia (A.4), (A.5) względem wariacji krzywej $q = q(t)$ o ustalonych końcach.

Tak sformułowaną zasadę wariacyjną można natychmiast uogólnić [23–35]. W tym celu rozważmy uogólnioną funkcję Lagrange'a zależną również od zmiennej S,

$$L = L(q, \dot{q}, t, S). \tag{A.6}$$

Rozważmy, dla zadanej krzywej $q = q(t)$, równanie różniczkowe zwyczajne

$$\dot{S}(t) = L\left(q(t), \dot{q}(t), t, S(t)\right), \quad S(t_0) = S_0. \tag{A.7}$$

Fizyczną trajektorię $q = q(t)$ otrzymujemy z żądania stacjonarności rozwiązania $S(t)$ względem wariacji $q(t)$ o ustalonych końcach:

$$\delta S[q; t_1] = 0, \quad \delta q(t_0) = 0 = \delta q(t_1). \tag{A.8}$$

Nietrudno pokazać [25], że tak sformułowana zasada wariacyjna prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - L\left(q, \dot{q}, t, S\right) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial L}{\partial S}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \end{cases} \tag{A.9}$$

Rozwiązując ten układ, znajdujemy fizyczną trajektorię $q = q(t)$ i uogólnione działanie $S = S(t), \quad t \in \langle t_0, t_1 \rangle$. Zasada wariacyjna Herglotza ma zastosowanie w opisie układów dysypacyjnych, pozwalając na ich opis przy pomocy funkcji Lagrange'a, które nie zależą jawnie od czasu [26].

Uogólnienie Herglotza zachowuje wiele zalet oryginalnego formalizmu Lagrange'a. Równania Lagrange'a definiują funkcję Lagrange'a z dokładnością do zupełnej pochodnej dowolnej funkcji współrzędnych uogólnionych i czasu. W przypadku formalizmu Herglotza fizyczna informacja zawarta jest w trajektorii $q = q(t)$. Możemy więc rozważyć transformacje

$$t' = q \tag{A.10}$$

$$q' = q \tag{A.11}$$

$$S' = S'(q, t, S), \quad \frac{\partial S'}{\partial S} \neq 0. \tag{A.12}$$

Odwracając relację (A.12) dostajemy

$$S = N(q, t, S'). \tag{A.13}$$

Z (A.12) dostajemy

$$\dot{S}' = \frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{\partial S'}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial S'}{\partial S}\dot{S} = \frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{\partial S'}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial S'}{\partial S}L, \tag{A.14}$$

gdzie w drugiej równości wykorzystaliśmy pierwsze z równań (A.9). Równania (A.14) możemy napisać w postaci [27]

$$\dot{S}' = L'(q, \dot{q}, S') \tag{A.15}$$

$$L'(q, \dot{q}, S') \equiv \left\{ \frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{\partial S'}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial S'}{\partial S}L \right\}_{S \to N(q,t,S')}. \tag{A.16}$$

Równanie (A.12) daje $S'[q, t_1] = S'(q(t_1), t_1, S[q, t_1])$ co, wobec $\delta q(t_1) = 0$, implikuje $\delta S = 0 \Leftrightarrow \delta S' = 0$. Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że równania (A.9) implikują (A.15) oraz

$$\frac{\partial L'}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial L'}{\partial S'}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{A.17}$$

W szczególnym przypadku

$$S' = S + F(q, t) \tag{A.18}$$

otrzymujemy standardową transformację lagranżjanu o zupełną pochodną.

Zaletą formalizmu Lagrange'a jest prosta reguła transformacji lagranżjanu przy transformacji czasu i współrzędnych uogólnionych: nowy lagranżjan otrzymujemy po prostu wyrażając stary lagranżjan przez nowe zmienne i mnożąc przez czynnik uwzględniający redefinicję czasu. Aby uogólnić tę własność na przypadek formalizmu Herglotza, rozważmy transformacje postaci

$$t' = t'(t, q, S) \tag{A.19}$$

$$q' = q'(t, q, S) \tag{A.20}$$

$$S' = S'(t, q, S). \tag{A.21}$$

Wykorzystując rozumowanie podobne do prowadzącego do wzoru (A.16), otrzymujemy następujące wyrażenie dla nowej funkcji Lagrange'a [27]:

$$L'(t', q', \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t'}, S') = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{\partial S'}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial S'}{\partial S}L\right). \tag{A.22}$$

Ważną konsekwencją formalizmu Lagrange'a jest twierdzenie Noether wiążące transformacje symetrii z prawami zachowania. Formalizm Herglotza prowadzi do uogólnienia twierdzenia Noether [32], [30], [29] (i drugiego twierdzenia Noether dla symetrii cechowania [31]). Podamy tu nieco prostsze i ogólniejsze sformułowanie niż opisane w [32].

Warunek symetrii oznacza, że równania ruchu w nowych zmiennych mają taką samą postać jak równania w pierwotnych zmiennych. (A.22) implikuje więc następujący warunek, by (A.19)-(A.21) były transformacjami symetrii:

$$L(t', q', \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t'}, S') = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{\partial S'}{\partial q} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial S'}{\partial S} L \right). \tag{A.23}$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do standardowego sformułowania, nie uwzględniamy tu jawnie faktu, że końcowy lagranżjan może różnić się od lewej strony (A.23) o odpowiednik zupełnej pochodnej. Porównując (A.16) i (A.23) widzimy jednak, że włączenie tego członu spowodowałoby jedynie modyfikację funkcji $S'(...)$.

Rozważając transformacje (A.19)-(A.21) w wersji infinitezymalnej,

$$t' = t + \delta t(t, q, S) \tag{A.24}$$
$$q' = q + \delta q(t, q, S) \tag{A.25}$$
$$S' = S + \delta S(t, q, S) \tag{A.26}$$

i rozwijając (A.23) z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu, dostajemy następującą postać noetherowskiej zasady zachowania:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{-\int\limits_0^t \frac{\partial L}{\partial S}\,\mathrm{d}t'} \left(\delta t L + (\delta q - \dot{q}\delta t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \delta S \right) \right) = 0. \tag{A.27}$$

W przeciwieństwie do noetherowskiej zasady zachowania w standardowym formalizmie Lagrange'a, równanie (A.27) nie jest zbyt użyteczne. Całka ruchu, ze względu na czynnik wykładniczy, nie jest lokalną funkcją współrzędnych i prędkości uogólnionych; przeciwnie, zależy od kształtu trajektorii w całym przedziale $\langle t_0, t \rangle$. Zauważmy jednak, że czynnik wykładniczy jest uniwersalny, niezależny od postaci transformacji symetrii. Jeżeli więc mamy n transformacji symetrii prowadzących do n funkcjonalnie niezależnych całek ruchu (A.27), to biorąc ilorazy tych całek otrzymujemy $n-1$ lokalnych całek ruchu. Tę ważną własność wykorzystujemy w rozdziale 2.7.

W analogii ze standardowym przypadkiem możemy wprowadzić odpowiednik formalizmu hamiltonowskiego [25]. W tym celu definiujemy pęd (pędy) uogólniony

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q, \dot{q}, S). \tag{A.28}$$

Założenie o nieosobliwości lagranżjanu pozwala wyliczyć prędkość uogólnioną jako funkcję pędu uogólnionego i zdefiniować hamiltonian

$$H(t, q, p, S) = p\dot{q}(t, q, p, S) - L(t, q, \dot{q}(t, q, p, S), S). \tag{A.29}$$

Równania (A.9) są równoważne następującym uogólnionym kanonicznym równaniom Hamiltona:

$$\begin{cases} \dot{q} & = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} & = -\frac{\partial H}{\partial q} - p\frac{\partial H}{\partial S} \\ \dot{S} & = p\frac{\partial H}{\partial p} - H \end{cases} \tag{A.30}$$

Możemy też zdefiniować uogólniony nawias Poissona $\{\ \}$ (tzw. nawias Mayera) dwóch funkcji $f(t, q, p, S)$ i $g(t, q, p, S)$:

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} + p\left(\frac{\partial f}{\partial S}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial S}\frac{\partial f}{\partial p}\right). \tag{A.31}$$

Nawias Mayera ma następujące własności, analogiczne do własności nawiasu Poissona:

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$ — antysymetria;
- $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$ — liniowość;
- $\{f \cdot g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ — własność Leibnitza;
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g\{h, f\}\} + \{h\{f, g\}\} + \frac{\partial f}{\partial S}\{g, h\} + \frac{\partial g}{\partial S}\{h, f\} + \frac{\partial h}{\partial S}\{f, g\} = 0$ — tożsamość Jacobiego.

Kanoniczne równania Hamiltona (A.30) można zapisać jako jedno równanie dla dowolnej funkcji $f = f(t, q, p, S)$ na przestrzeni fazowej:

$$\dot{f} = \{f, H\} - H\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{A.32}$$

Z tożsamości Jacobiego i równania (A.32) wynika, że nawias Mayera spełnia równanie

$$\{f, g\}^{\cdot} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\} + \frac{\partial H}{\partial S}\{f, g\}. \tag{A.33}$$

Z tego równania otrzymujemy następujący wniosek:

$$\{f, g\}_t = \rho\{f, g\}_0 \tag{A.34}$$

$$\rho = e^{\int_0^t \frac{\partial H}{\partial S}\,\mathrm{d}t'} = e^{-\int_0^t \frac{\partial L}{\partial S}\,\mathrm{d}t'}. \tag{A.35}$$

W równaniu (A.34) nawias Mayera po lewej stronie liczony jest względem zmiennych kanonicznych w chwili t, zaś po prawej stronie — w chwili $t = 0$.

Formalizm Herglotza dopuszcza naturalne rozszerzenie pojęcia transformacji kanonicznej. Transformację

$$\tilde{q} = \tilde{q}(q, p, S, t) \tag{A.36}$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(q, p, S, t) \tag{A.37}$$

$$\widetilde{S} = \widetilde{S}(q, p, S, t) \tag{A.38}$$

nazywamy transformacją kanoniczną, jeżeli istnieje taka funkcja

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, \widetilde{S}, t), \tag{A.39}$$

że równania kanoniczne (A.30) są równoważne takim samym równaniom w nowych zmiennych z nowym hamiltonianem $\widetilde{H}$. Można pokazać [25], że transformacje (A.36) — (A.38) są transformacjami kanonicznymi, jeśli zachodzi warunek

$$\tilde{p}\,\mathrm{d}\tilde{q} - \sigma p\,\mathrm{d}q - \left(\widetilde{H} - \sigma H\right)\,\mathrm{d}t = \,\mathrm{d}\widetilde{S} - \sigma\,\mathrm{d}S, \tag{A.40}$$

przy czym σ jest niezerową funkcją zmiennych kanonicznych.

Zakładając, że równanie (A.36) można rozwiązać względem p,

$$p = p\,(q, \tilde{q}, S, t) \tag{A.41}$$

możemy zdefiniować funkcję

$$\widetilde{S}\,(q, \tilde{q}, S, t) = \widetilde{S}\,(q, p(q, \tilde{q}, S, t), S, t)\,, \tag{A.42}$$

co pozwala przepisać równanie (A.40) w postaci

$$\begin{gathered}\tilde{p}\,\mathrm{d}\tilde{q} - \sigma p\,\mathrm{d}q - \left(\widetilde{H} - \sigma H\right)\,\mathrm{d}t = \\ \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q}\,\mathrm{d}q + \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \tilde{q}}\,\mathrm{d}\tilde{q} + \left(\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial S} - \sigma\right)\,\mathrm{d}S + \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial t}\,\mathrm{d}t.\end{gathered} \tag{A.43}$$

Porównując wyrazy przy niezależnych różniczkach dostajemy wzory definiujące transformację kanoniczną:

$$p = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q} \tag{A.44}$$

$$\tilde{p} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}} \tag{A.45}$$

$$\sigma = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial S} \tag{A.46}$$

$$\widetilde{H} = \sigma H - \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial t}. \tag{A.47}$$

W przypadku gdy hamiltonian H nie zależy od S, standardowe transformacje kanoniczne otrzymujemy kładąc

$$\widetilde{S} = S + \phi(q, \tilde{q}, t). \tag{A.48}$$

W wielu przypadkach wygodniej jest używać funkcji generującej transformację kanoniczną zależnej od wyjściowej współrzędnej i końcowego pędu. Zakładając, że równanie (A.37) można rozwiązać względem p,

$$p = p(q, \tilde{p}, S, t), \tag{A.49}$$

definiujemy nową funkcję tworzącą

$$\psi(q, \tilde{p}, S, t) = \tilde{p}\, \tilde{q}\,(q, p(q, \tilde{p}, S, t), S, t) - \widetilde{S}\,(q, p(q, \tilde{p}, S, t), S, t)\,. \tag{A.50}$$

Łatwo sprawdzić, że w terminach nowej funkcji tworzącej transformacje kanoniczne przyjmują postać:

$$p = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial q} \tag{A.51}$$

$$\tilde{q} = \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{p}} \tag{A.52}$$

$$\sigma = -\frac{\partial\psi}{\partial S} \tag{A.53}$$

$$\widetilde{H} = \sigma H + \frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{A.54}$$

Funkcję tworzącą transformacje infinitezymalne można napisać w postaci

$$\psi(q, \tilde{p}, s, t) = -S + q\tilde{p} + \delta G(q, p, s, t), \tag{A.55}$$

gdzie generator δG, będąc wielkością infinitezymalną pierwszego rzędu, może być traktowany jako funkcja wyjściowych zmiennych. Kładąc $\tilde{q} = q + \delta q$, $\tilde{p} = p + \delta p$, $\widetilde{S} = S + \delta S$, $\sigma = 1 + \delta\sigma$ dostajemy z (A.51)–(A.54)

$$\delta q = \frac{\partial\delta G}{\partial p} \tag{A.56}$$

$$\delta p = -p\frac{\partial\delta G}{\partial S} - \frac{\partial\delta G}{\partial q} \tag{A.57}$$

$$\delta S = p\frac{\partial\delta G}{\partial p} - \delta G \tag{A.58}$$

$$\delta\sigma = -\frac{\partial\delta G}{\partial S}. \tag{A.59}$$

Korzystając z formuł (A.56)–(A.59) możemy bez trudu uogólnić twierdzenie Noether na przypadek, gdy transformacja symetrii jest transformacją kanoniczną (niekoniecznie punktową). Warunek symetrii oznacza, że nowy hamiltonian jest taką samą funkcją nowych zmiennych, jak stary hamiltonian — starych:

$$\widetilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}, \widetilde{S}, t) = H(\tilde{q}, \tilde{p}, \widetilde{S}, t). \tag{A.60}$$

Pisząc równanie (A.54) w wersji infinitezymalnej, wykorzystując równania (A.56)–(A.59) oraz równanie ruchu (A.32) dostajemy

$$\frac{\mathrm{d}\delta G}{\mathrm{d}t} + \delta G\,\frac{\partial H}{\partial S} = 0, \tag{A.61}$$

co można zapisać w postaci zasady zachowania

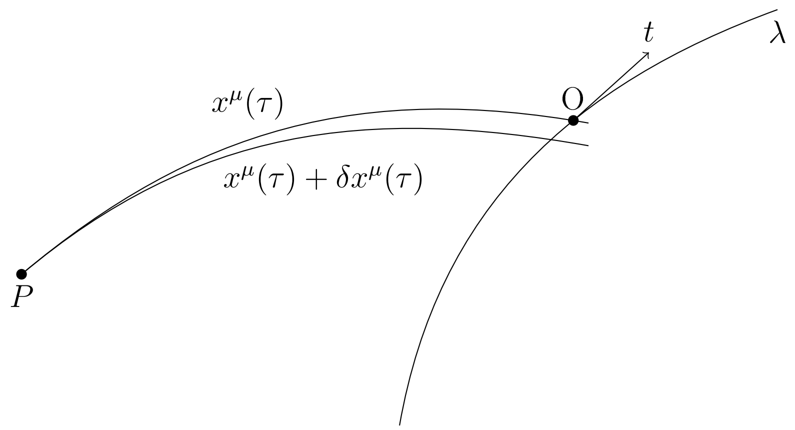
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\int\limits_0^t \frac{\partial H}{\partial S}\,\mathrm{d}t'}\,\delta\sigma \right) = 0. \tag{A.62}$$

Z równania (A.29) wynika, że $\frac{\partial H}{\partial S} = -\frac{\partial L}{\partial S}$ i otrzymujemy uogólnienie zasady zachowania (A.27).

Dodatek B

Zasada Fermata dla dowolnych pól grawitacyjnych

Przytoczymy tu elegancki dowód zasady Fermata dla dowolnych pól grawitacyjnych, sformułowanej w pracy [18], podany w [19]. Niech λ będzie linią świata obserwatora O. Promień świetlny wychodzi z punktu P czasoprzestrzeni i przecina linię świata obserwatora; trajektoria promienia opisuje równanie $x^\mu = x^\mu(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$ (τ nie musi być parametrem afinicznym). Rozważamy sąsiednie krzywe zerowe, $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$, wychodzące z punktu P i przecinające linię świata λ.



Rysunek B.1: Geometria kąta odchylenia promienia świetlnego.

Warunek, że krzywa $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ jest krzywą zerową, ma postać

$$g_{\mu\nu}(x + \delta x)\frac{\mathrm{d}(x^\mu + \delta x^\mu)}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}(x^\nu + \delta x^\nu)}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{B.1}$$

lub, z dokładnością do wyrazów liniowych w δx^μ

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}+\frac{1}{2}\delta x^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}=0. \tag{B.2}$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{D}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau} &= g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}+\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\delta x^\alpha\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\right)\\ =& g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}+\frac{1}{2}g^{\nu\rho}\left(\partial_\alpha g_{\rho\beta}+\partial_\beta g_{\rho\alpha}-\partial_\rho g_{\alpha\beta}\right)\delta x^\alpha\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\right)\\ =& g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\delta x^\nu}{\mathrm{d}\tau}+\frac{1}{2}\delta x^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\beta}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}=0 \end{aligned} \tag{B.3}$$

na mocy (B.2).
Krzywa $x^\mu = x^\mu(\tau)$ jest zerową geodezyjną, więc

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)=\rho(\tau)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}. \tag{B.4}$$

Mamy dalej

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\delta x_\mu\right)=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\delta x_\mu+\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{D}\delta x_\mu}{\mathrm{d}\tau}. \tag{B.5}$$

Drugi człon po prawej stronie znika na mocy (B.3). Wykorzystując (B.4) dostajemy równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\delta x_\mu\right)=\rho(\tau)\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\delta x_\mu\right), \tag{B.6}$$

które z warunkiem początkowym $\delta x^\mu(0)=0$ (ponieważ wszystkie trajektorie zaczynają się w punkcie P) daje

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\delta x_\mu=0. \tag{B.7}$$

Wszystkie trajektorie przecinają linię świata λ, więc

$$\delta x^\mu(1)\sim t^\mu, \tag{B.8}$$

gdzie t^μ jest wektorem stycznym do λ w punkcie O; zatem $\delta x^\mu(1)$ jest wektorem typu czasowego. Wektor $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ jest wektorem zerowym, więc (B.7) implikuje

$$\delta x^\mu(1)=0, \tag{B.9}$$

czyli warunek stacjonarności.

Odwrotnie, załóżmy, że (B.9) zachodzi; pokażemy, że $x^\mu = x^\mu(\tau)$ jest (zerową) geodezyjną. Niech

$$t^\mu = t^\mu(\lambda) \tag{B.10}$$

będzie zbiorem wektorów otrzymanych z t^μ przez przeniesienie równoległe wzdłuż krzywej $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Połóżmy

$$\delta x^\mu(\tau) = \delta a(\tau)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) + \delta b(\tau)t^\mu(\tau), \tag{B.11}$$

przy czym $\delta x^\mu(0) = 0$ i (B.9) implikują

$$\delta a(0) = \delta b(0) = 0 = \delta a(1) = \delta b(1). \tag{B.12}$$

Warunek (B.3) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{D}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \\ &= g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\left(\delta\dot{a}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) + \delta a\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) + \delta\dot{b}t^\mu\right) \\ &= -\delta a\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right)g_{\mu\nu} + \delta\dot{b}t^\mu g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}, \end{aligned} \tag{B.13}$$

gdzie wykorzystaliśmy relacje

$$\frac{\mathrm{D}t^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{B.14}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right) = 2g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\right) \\ &= g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) + g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right). \end{aligned} \tag{B.16}$$

Równanie (B.13) pozwala wyznaczyć $\delta b(1)$ w funkcji $\delta a(\tau)$:

$$\delta b(1) = \int\limits_0^1 \frac{\delta a(\tau)g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right)}{t_\mu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}}. \tag{B.17}$$

Ponieważ $\delta b(1) = 0$ dla dowolnych $\delta a(\tau)$ ($\delta a(\tau)$ jest dowolne, z wyjątkiem warunków $\delta a(0) = 0 = \delta a(1)$), (B.17) implikuje

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right) = 0, \tag{B.18}$$

czyli $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)$ jest wektorem zerowym.

Z drugiej strony, $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)$ jest ortogonalny do $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ (równanie (B.15)). Zatem

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) = \rho(\tau)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{B.19}$$

czyli $x^\mu = x^\mu(\tau)$ jest geodezyjną.

Dodatek C

Formalizm hamiltonowski dla geodezyjnych zerowych

Lagranżjan opisujący, zgodnie z zasadą Fermata, geodezyjne zerowe można zapisać w postaci:

$$\mathcal{L} = -g_k \dot{x}^k + \sqrt{\rho_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l}, \tag{C.1}$$

gdzie

$$g_k \equiv \frac{g_{0k}}{g_{00}} \tag{C.2}$$

$$\rho_{kl} \equiv \frac{\gamma_{kl}}{g_{00}}. \tag{C.3}$$

Pęd uogólniony ma postać

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = -g_i + \frac{\rho_{ik}\dot{x}^k}{\sqrt{\rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}}. \tag{C.4}$$

Definiujemy

$$\Pi_i \equiv p_i + g_i = \frac{\rho_{ik}\dot{x}^k}{\sqrt{\rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}} \tag{C.5}$$

lub

$$g^{ik}\Pi_k = \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{\rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}}, \tag{C.6}$$

skąd wynika następujący pierwotny wiąz pierwszego rodzaju:

$$\rho^{ij}\Pi_i\Pi_j - 1 = 0. \tag{C.7}$$

Stąd hamiltonian przybiera następującą postać

$$\mathcal{H} = \mu\left(\rho^{ij}\Pi_i\Pi_j - 1\right), \tag{C.8}$$

gdzie μ jest mnożnikiem Lagrange'a. Uogólnione równania kanoniczne Hamiltona

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \tag{C.9}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} - p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^0} \tag{C.10}$$

$$\dot{x}^0 = p_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \mathcal{H} \tag{C.11}$$

przyjmują postać:

$$\dot{x}^i = 2\mu\rho^{ik}\Pi_k \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_i = &- \mu\partial_i\rho^{kl}\Pi_k\Pi_l - 2\mu\rho^{kl}\partial_i g_k\Pi_l \\ &- \mu\left(\Pi_i - g_i\right)\partial_0\rho^{kl}\Pi_k\Pi_l - 2\mu\left(\Pi_i - g_i\right)\rho^{kl}\partial_0 g_k\Pi_l \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\dot{x}^0 = \mu\left(\rho^{ik}\left(p_i - g_i\right)\Pi_k + 1\right). \tag{C.14}$$

Z (C.12) otrzymujemy

$$\Pi_i = \frac{1}{2\mu}\rho_{ik}\dot{x}^k \tag{C.15}$$

i równanie (C.7) implikuje

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\rho_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l} \tag{C.16}$$

(wybór drugiego rozwiązania prowadzi do tych samych wniosków).

Różniczkując (C.12) po σ i wykorzystując (C.5), (C.12) i (C.13) dostajemy

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i = &\, 2\dot{\mu}\rho^{ik}\Pi_k + 2\mu\partial_l\rho^{ik}\dot{x}^l\Pi_k \\ &+ 2\mu^2\partial_0\rho^{ik}\Pi_k\left(\rho^{mn}\Pi_m\Pi_n - 2\rho^{mn}g_m\Pi_n + 1\right) \\ &+ 2\mu^2\rho^{ik}\partial_l g_k\dot{x}^l + 2\mu^2\rho^{ik}\partial_0 g_k\left(\rho^{mn}\Pi_m\Pi_n - 2\rho^{mn}g_m\Pi_n + 1\right) \\ &+ 2\mu^2\rho^{ik}\left[-\partial_k\rho^{mn}\Pi_m\Pi_n - 2\rho^{mn}\partial_k g_m\Pi_n\right. \\ &\left. - \left(\Pi_k - g_k\right)\partial_0 g^{mn}\Pi_m\Pi_n - 2\left(\Pi_k - g_k\right)\rho^{mn}\,\partial_0 g_m\Pi_n\right]. \end{aligned} \tag{C.17}$$

Z drugiej strony, równania

$$\dot{x}^0 = \mathcal{L} \tag{C.18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = 0 \tag{C.19}$$

dają

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\rho^{ij}\left(\partial_l\rho_{jk} + \partial_k\rho_{jl} - \partial_j\rho_{kl}\right)\dot{x}^k\dot{x}^l \\
&+ \sqrt{\rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}}\right)\dot{x}^i \\
&+ \sqrt{\rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}\rho^{ij}\left(\partial_j g_k - \partial_k g_j\right)\dot{x}^k \\
&+ \sqrt{\rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}\rho^{ij}\left(g_k\partial_0 g_j - g_j\partial_0 g_k\right)\dot{x}^k \\
&- \rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n\rho^{ij}\partial_0 g_j + \sqrt{\rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}\rho^{ij}\partial_0\rho_{jk}\dot{x}^k \\
&- \frac{1}{2}\rho^{ij}\left(\partial_0\rho_{jk}g_l + \partial_0\rho_{jl}g_k\right)\dot{x}^k\dot{x}^l + \frac{\rho^{ij}}{2}\left(\partial_0 g_k\rho_{jl} + \partial_0 g_l\rho_{jk}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\rho^{ij}g_j\partial_0\rho_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l - \frac{1}{2}\frac{\partial_0\rho_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l}{\sqrt{\rho_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}}\dot{x}^i = 0.
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Korzystając z (C.12) i (C.16) sprawdzamy, że równania (C.17) i (C.20) są równoważne.

Przyjrzyjmy się bliżej symetrii cechowania dla funkcji Lagrange'a danej wzorem (C.1) lub ogólniej, dla dowolnego lagranżjanu będącego jednorodną funkcją pierwszego stopnia w prędkościach,

$$\mathcal{L}\left(\vec{x}, x^0, \lambda\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma}\right) = \lambda\mathcal{L}\left(\vec{x}, x^0, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma}\right). \tag{C.21}$$

Z (C.21) wynika, że dla dowolnej reparametryzacji $\sigma \to \sigma'(\sigma)$ zachodzi:

$$\mathcal{L}\left(\vec{x}, x^0, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma'}\right) \equiv \mathcal{L}\left(\vec{x}, x^0, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\sigma'}\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma}\right) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\sigma'}\mathcal{L}\left(\vec{x}, x^0, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\sigma}\right). \tag{C.22}$$

Korzystając z powyższej relacji łatwo pokazać, że równania Herglotza

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\sigma} = \mathcal{L} \tag{C.23}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^0}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^i} = 0 \tag{C.24}$$

są niezmiennicze ze względu na reparametryzację $\sigma \to \sigma' = \sigma'(\sigma)$, $\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}\sigma} \neq 0$.

Na tę niezmienniczość można spojrzeć jeszcze inaczej. Równanie (C.21) implikuje tożsamość:

$$\mathcal{L} - \dot{\vec{x}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}} \equiv 0. \tag{C.25}$$

Różniczkując ją po σ dostajemy

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^0}\dot{x}^0 + \dot{\vec{x}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{x}}}\right)\right) = 0. \tag{C.26}$$

Z (C.23) i (C.25) wynika, że

$$\dot{x}^0 = \dot{\vec{x}}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}}, \tag{C.27}$$

więc (C.26) możemy przedstawić w postaci

$$\dot{\vec{x}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}}\right)\right) = 0. \tag{C.28}$$

Jest to tożsamość Noether wynikająca z niezmienniczości na reparametryzację trajektorii. Widzimy, że trzy równania (C.24) są związane dodatkową relacją, więc tylko dwa mogą być niezależne. Wybierając dowolną (odpowiednio różniczkowalną) funkcję $x^3 = x^3(\sigma)$ i podstawiając ją do dwóch pierwszych równań możemy wyznaczyć $x^a = x^a(\sigma)$, $a = 1, 2$. Trzecie równanie będzie wtedy spełnione tożsamościowo. Wygodnym warunkiem cechowania, którego używamy w rozprawie, jest $x^3 = \sigma$. Łatwo sprawdzić, że odpowiednie podstawienie możemy wykonać bezpośrednio w funkcji Lagrange'a.

Dodatek D

Metoda Lindstedta–Poincarégo

Rozważmy małe drgania układu dynamicznego opisywanego funkcją Lan- grange'a:

$$L = \frac{1}{2}\dot{u}^2 - V(u), \tag{D.1}$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie po parametrze ewolucji ϕ. Zakładamy, że $V(u)$ jest wielomianem stopnia $N+1$ (możemy też rozważać przypadek, gdy $V(u)$ jest funkcją analityczną w otoczeniu punktu $u = 0$) i $u = 0$ jest lokalnym punktem stabilnej równowagi (lokalnym minimum). Odpowiednie równanie Lagrange'a ma postać

$$\ddot{u} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u^n = 0 \ , \qquad \alpha_1 \equiv \omega_0^2. \tag{D.2}$$

Zakładając, że $u \ll 1$ możemy rozwiązać równanie (D.2) perturbacyjnie w amplitudzie drgań anharmonicznych.

W najniższym rzędzie zachowujemy w (D.2) tylko człony liniowe, otrzymując równanie oscylatora harmonicznego,

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \tag{D.3}$$

z rozwiązaniem (szczególnym, ale wystarczającym dla naszych celów)

$$u_1 = a\cos(\omega_0\phi). \tag{D.4}$$

W następnym rzędzie rachunku zaburzeń kładziemy

$$u = u_1 + u_2 = a\cos(\omega_0\phi) + u_2, \tag{D.5}$$

gdzie u_2 jest członem proporcjonalnym do a^2. W tym rzędzie równanie (D.2) redukuje się do

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \alpha_2 u^2 = 0. \tag{D.6}$$

Podstawiając tu rozwinięcie (D.4) dostajemy

$$\ddot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 = -\alpha_2 a^2 \cos^2(\omega_0 \phi) = \frac{-\alpha_2 a^2}{2} \left(1 + \cos(2\omega_0 \phi)\right). \tag{D.7}$$

Rozwiązanie tego równania, z pominięciem rozwiązania równania jednorodnego (które zmodyfikowałoby tylko wartość amplitudy a) ma postać

$$u_2 = \frac{-\alpha_2}{2\omega_0^2} a^2 + \frac{\alpha_2}{6\omega_0^2} a^2 \cos(2\omega_0 \phi). \tag{D.8}$$

W kolejnym rzędzie kładziemy

$$u = u_1 + u_2 + u_3, \tag{D.9}$$

gdzie u_3 jest proporcjonalne do a^3. Podstawiając (D.9) do równania

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 = 0, \tag{D.10}$$

dostajemy

$$\ddot{u}_3 + \omega_0^2 u_3 = -\alpha_3 u_1^3 - 2\alpha_2 \alpha_1 u_2, \tag{D.11}$$

czyli

$$\ddot{u}_3 + \omega_0^2 u_3 = -\alpha_3 a^3 \cos^3(\omega_0 \phi) + \frac{\alpha_2^2 a^3}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 \phi)\right) \cos(\omega_0 \phi). \tag{D.12}$$

Prawą stronę (D.12) możemy napisać w postaci

$$a^3 \left(\left(\frac{5\alpha_2^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}\alpha_3 \right) \cos(\omega_0 \phi) - \left(\frac{\alpha_3}{4} + \frac{\alpha_2^2}{6\omega_0^2} \right) \cos(3\omega_0 \phi) \right). \tag{D.13}$$

Pierwszy wyraz w (D.13) oscyluje z częstością równą częstości własnej ω_0, więc prowadzi do członu rezonansowego w równaniu (D.12). Rozwiązanie ma postać

$$u_3 = \frac{a^3}{2\omega_0} \left(\frac{5\alpha_2^2}{12\omega_0^2} - \frac{3}{8}\alpha_3 \right) \phi \sin(\omega_0 \phi) + a^3 \left(\frac{\alpha_3}{32} + \frac{\alpha_2^2}{48\omega_0^2} \right) \cos(3\omega_0 \phi). \tag{D.14}$$

W kolejnych rzędach rachunku zaburzeń taka sytuacja będzie się powtarzać, prowadząc do członów typu wielomian zmiennej ϕ razy funkcja trygonometryczna tej samej zmiennej. Rozwinięcie perturbacyjnie nie może więc być jednostajnie zbieżne, gdy $|\phi|$ rośnie.

Aby pozbyć się członów rezonansowych, modyfikujemy rachunek zaburzeń przez rozwinięcie w szereg w amplitudzie również częstości drgań. Człony rezonansowe pojawiłyby się, gdybyśmy rozwinęli w szereg funkcje trygonometryczne argumentu $\omega\phi$. Innymi słowy, rozwinięcie Lindstedta-Poincarégo jest częściowo zsumowanym rozwinięciem potęgowym w amplitudzie. Wprowadzając zmienną niezależną

$$\tau \equiv \omega\phi \tag{D.15}$$

i rozwinięcia

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + ... \\ u &= u_1 + u_2 + u_3 + ... \end{aligned} \tag{D.16}$$

dostajemy z równania (D.2)

$$\begin{aligned} &(\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + ...)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} (u_1 + u_2 + u_3 + ...) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n (u_1 + u_2 + u_3 + ...)^n = 0. \end{aligned} \tag{D.17}$$

Wydzielając wyrazy ustalonego rzędu otrzymujemy kolejno

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\tau^2} + u_1 = 0 \tag{D.18}$$

$$\omega_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}\tau^2} + u_2 \right) = - 2\omega_0\omega_1 \frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\tau^2} - \alpha_2 u_1^2 \tag{D.19}$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 u_3}{\mathrm{d}\tau^2} + u_3 \right) =& - 2\omega_0\omega_1 \frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}\tau^2} - 2\alpha_2 u_1 u_2 \\ & - \left(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2\right) \frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\tau^2} - \alpha_3 u_1^3 \end{aligned} \tag{D.20}$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 u_4}{\mathrm{d}\tau^2} + u_4 \right) =& - 2\omega_0\omega_1 \frac{\mathrm{d}^2 u_3}{\mathrm{d}\tau^2} - \left(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2\right) \frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}\tau^2} \\ & - 2\left(\omega_1\omega_2 + \omega_0\omega_3\right) \frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}\tau^2} - \alpha_2 \left(u_2^2 + 2u_1u_3\right) \\ & - 3\alpha_3 u_1^2 u_2 - \alpha_4 u_1 \end{aligned} \tag{D.21}$$

etc.
Równanie (D.18) daje

$$u_1 = a\cos\tau; \tag{D.22}$$

Podstawiając (D.22) do (D.19) dostajemy

$$\omega_0^2 \left(\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}\tau} + u_2 \right) = 2\omega_0\omega_1 a\cos\tau - \frac{1}{2}\alpha_2 a^2 \left(1 + \cos(2\tau)\right). \tag{D.23}$$

Pierwszy człon po prawej jest rezonansowy; aby go wyeliminować kładziemy

$$\omega_1 = 0 \tag{D.24}$$

i rozwiązujemy (D.24) otrzymując:

$$u_2 = \frac{-\alpha_2 a^2}{2\omega_0^2}\left(1 - \frac{1}{3}\cos(2\tau)\right). \tag{D.25}$$

Podstawiając (D.22) i (D.25) do (D.20), otrzymujemy znów człon rezonansowy. Jego znikanie daje warunek dla ω_2:

$$\omega_2 = \left(\frac{9\alpha_3\omega_0^2 - 10\alpha_2^2}{24\omega_0^3}\right) a^2 \tag{D.26}$$

Rozwiązując teraz równanie (D.20) dostajemy

$$u_3 = a^3\left(\frac{\alpha_2^2}{48\omega_0^2} + \frac{\alpha_3}{32\omega_0^2}\right)\cos(3\tau). \tag{D.27}$$

Wstawiając (D.22), (D.25) i (D.27) do równania (D.21), znajdujemy warunek braku członu rezonansowego

$$\omega_3 = 0 \tag{D.28}$$

oraz jawną postać u_4:

$$\begin{aligned} u_4 = \Bigg[& \left(-\frac{19}{72}\frac{\alpha_2^3}{\omega_0^6} = \frac{5}{8}\frac{\alpha_2\alpha_3}{\omega_0^4} - \frac{3}{8}\frac{\alpha_4}{\omega_0^2}\right) \\ & + \left(\frac{59}{432}\frac{\alpha_2^3}{\omega_0^6} - \frac{31}{96}\frac{\alpha_2\alpha_3}{\omega_0^4} + \frac{\alpha_4}{6\omega_0^2}\right)\cos(2\omega\phi) \\ & + \left(\frac{1}{432}\frac{\alpha_2^3}{\omega_0^6} + \frac{1}{96}\frac{\alpha_2\alpha_3}{\omega_0^4} + \frac{\alpha_4}{120\omega_0^2}\right)\cos(4\omega\phi)\Bigg] a^4. \end{aligned} \tag{D.29}$$

Proces ten możemy kontynuować otrzymując kolejne przybliżenia dla u i częstości ω; rozwinięcie dla ω jest jednoznacznie wyznaczone przez warunek znikania członów rezonansowych.

Dodatek E

Całkowalność równań geodezyjnych dla metryki Schwarzschilda–de Sittera

Funkcja Lagrange'a opisująca ruch wzdłuż geodezyjnych w czasoprzestrzeni Schwarzschilda–de Sittera ma postać (σ - parametr afiniczny):

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\Bigg[& \left(1-\frac{2M}{R}-\frac{\Lambda}{3}R^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2 - \frac{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2}{\left(1-\frac{2M}{R}-\frac{\Lambda}{3}R^2\right)} \\ & -R^2\left(\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{E.1}$$

Odpowiedni hamiltonian można zapisać w formie:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_t^2}{1-\frac{2M}{R}-\frac{\Lambda}{3}R^2} - \left(1-\frac{2M}{R}-\frac{\Lambda}{3}R^2\right)p_r^2 - \frac{p_\theta^2}{R^2} - \frac{p_\phi^2}{R^2\sin^2\theta}\right). \tag{E.2}$$

H nie zależy jawnie od parametru ewolucji σ; zmienna t jest cykliczna. Mamy zatem dwie całki ruchu: H i p_t. Dodatkowo, rozważana metryka jest niezmiennicza na obroty. Zatem mamy trzy dodatkowe całki ruchu opisane składowymi momentu pędu. Interesują nas całki pozostające w inwolucji; możemy skonstruować ze składowych momentu pędu dwie takie całki: trzecią składową i kwadrat momentu pędu. Alternatywnie, zauważmy, że hamiltonian (E.2) ma postać dopuszczającą natychmiastową separację zmiennych w równaniu Hamiltona–Jacobiego; odpowiednimi całkami ruchu są p_ϕ i $p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}$; ostatnie wyrażenie daje właśnie kwadrat momentu pędu. Mamy więc cztery

całki:
$$H, \quad p_t, \quad p_\phi, \quad p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}, \tag{E.3}$$
które komutują poissonowsko. Układ dynamiczny, opisany hamiltonianem (E.2) jest wiec całkowalny w sensie Arnolda–Liouville'a.

Dodatek F

Hamiltoniany opisujące te same trajektorie w przestrzeni fazowej

Przedstawimy tu krótko wyniki otrzymane w pracy [41]. Załóżmy, że mamy układ hamiltonowski na 2N-wymiarowej przestrzeni fazowej

$$H = H(\vec{q}, \vec{p}; \vec{\lambda}), \tag{F.1}$$

gdzie $\vec{q} \equiv (q_1, ..., q_N)$, $\vec{p} \equiv (p_1, ..., p_N)$, zaś $\vec{\lambda} \equiv (\lambda_1, ..., \lambda_M)$ jest zbiorem parametrów układu (masy, stałe sprzężenia, częstości etc.).
Niech $\widetilde{H}$ będzie nową zmienną. Zastąpmy parametry λ_α przez funkcje

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(\widetilde{H}). \tag{F.2}$$

Załóżmy, że funkcje $\lambda_\alpha(.)$ wybrane są tak, by równanie

$$\widetilde{H}(\vec{q}, \vec{p}) = H(\vec{q}, \vec{p}; \vec{\lambda}(\widetilde{H}(\vec{q}, \vec{p}))) \tag{F.3}$$

miało jednoznaczne rozwiązanie $\widetilde{H}(\vec{q}, \vec{p})$ (przynajmniej lokalnie). Zauważmy, że równanie (F.3) implikuje

$$E \equiv H(\vec{q}, \vec{p}; \lambda(\widetilde{E})) = \widetilde{E}. \tag{F.4}$$

Można pokazać, że równania kanoniczne

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}; \lambda(\widetilde{E}))}{\partial p_i} \tag{F.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}; \lambda(\widetilde{E}))}{\partial q_i} \tag{F.6}$$

oraz

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}\tilde{t}} = \frac{\partial\widetilde{H}(\vec{q},\vec{p})}{\partial p_i} \tag{F.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -\frac{\partial\widetilde{H}(\vec{q},\vec{p})}{\partial q_i} \tag{F.8}$$

opisują ten sam zbiór niesparametryzowanych trajektorii odpowiadających wspólnej energii $\widetilde{E} = E$. Co więcej, możemy łatwo powiązać parametry ewolucji t i $\tilde{t}$. Zdefiniujmy funkcję

$$\Omega(\vec{q},\vec{p}) \equiv 1 - \frac{\partial H}{\partial\lambda_\alpha}\frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial\widetilde{H}}. \tag{F.9}$$

Dla zadanej trajektorii $\vec{q} = \vec{q}(\tilde{q})$, $\vec{p} = \vec{p}(\tilde{q})$, $\Omega(\tilde{t}) \equiv \Omega(\vec{q}(\tilde{t}),\vec{p}(\tilde{t}))$ staje się funkcją czasu $\tilde{t}$. Związek między t i $\tilde{t}$ przybiera postać

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\mathrm{d}t} = \Omega(\tilde{t}). \tag{F.10}$$

Warto podkreślić, że istnieje też jednoznaczny związek między całkami ruchu obu układów hamiltonowskich [41].

Szczególny przypadek powyższej procedury otrzymujemy dokonując zamiany

$$H(\vec{q},\vec{p};\lambda) \to H(\vec{q},\vec{p};\lambda) + \mu, \tag{F.11}$$

gdzie μ jest trywialną stałą nie wpływającą na postać równań ruchu. Podstawiając $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(\widetilde{H})$, $\mu = \widetilde{H}$ wnioskujemy, że wszystkie powyższe stwierdzenia pozostają w mocy, z wyjątkiem relacji

$$H(\vec{q},\vec{p};\lambda(\widetilde{E})) = 0, \tag{F.12}$$

tak że porównujemy trajektorie odpowiadające energiom $\widetilde{E}$ i 0.

Bibliografia

[1] S. Weinberg, "The quantum theory of massless particles," Lectures on Particles and Field Theory, vol. 2, p. 405, 1965.

[2] S. Weinberg, "Photons and Gravitons in S Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass," Physical Review, vol. 135, p. B1049, 1964.

[3] X. Bekaert, N. Boulanger, and P. Sundell, "How higher-spin gravity surpasses the spin-two barrier," Rev. Mod. Phys., vol. 84, p. 987, 2012.

[4] P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco, Gravitational lenses as astrophysical tools. Springer, 1992.

[5] P. Schneider, C. Kochanek, and J. Wambsganss, Gravitational lensing: strong, weak and micro, vol. 33. Springer Science & Business Media, 2006.

[6] P. Schneider, "A new formulation of gravitational lens theory, time-delay, and Fermat's principle," Astronomy and Astrophysics, vol. 143, pp. 413–420, 1985.

[7] H. Weyl, "The theory of gravitation," Annalen Phys, vol. 54, p. 117, 1917.

[8] W. Pauli, Theory of relativity. Pergamon Press, 1958.

[9] K. S. Thorne, C. W. Misner, and J. A. Wheeler, Gravitation. Macmillan, 1973.

[10] P. M. Quan, "Le principe de Fermat en relativité générale," in Proc. Royaumont Conf.(1959) Les théories relativistes de la gravitation. Editions du Centre Nationale de la Recherche Scientifique, Paris, p. 165, 1962.

[11] D. R. Brill, “Observational contacts of general relativity,” in Relativity, Astrophysics and Cosmology: Proceedings of the Summer School Held, 14–26 August, 1972 at the Banff Centre, Banff, Alberta, pp. 127–152, Springer, 1973.

[12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, 1980.

[13] R. Blandford and R. Narayan, “Fermat’s principle, caustics, and the classification of gravitational lens images,” Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X), vol. 310, Nov. 15, 1986, p. 568-582., vol. 310, pp. 568–582, 1986.

[14] I. Kovner and B. Paczynski, “Supernovae in luminous arcs,” Astrophysical Journal, Part 2-Letters (ISSN 0004-637X), vol. 335, pp. L9–L13, 1988.

[15] I. Kovner, “Diagnostics of compact clusters of galaxies by giant luminous arcs,” Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X), vol. 337, pp. 621–635, 1989.

[16] C. Hogan and R. Narayan, “Gravitational lensing by cosmic strings,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 211, pp. 575–591, 1984.

[17] B. McBreen and L. Metcalfe, “Gravitational radiation and gravitational lensing as a source of electromagnetic bursts,” Nature, vol. 332, pp. 234–236, 1988.

[18] I. Kovner, “Fermat principle in arbitrary gravitational fields,” Astrophysical Journal, vol. 351, p. 114, 1990.

[19] R. Nityananda and J. Samuel, “Fermat’s principle in general relativity,” Physical Review D, vol. 45, p. 3862, 1992.

[20] V. Perlick, “On Fermat’s principle in general relativity. I. the general case,” Classical and Quantum Gravity, vol. 7, p. 1319, 1990.

[21] V. Perlick, “On Fermat’s principle in general relativity. II. the conformally stationary case,” Classical and Quantum Gravity, vol. 7, p. 1849, 1990.

[22] V. P. Frolov, “Generalized Fermat’s principle and action for light rays in a curved spacetime,” Phys. Rev. D, vol. 88, p. 064039, 2013.

[23] G. Herglotz, "Lectures at the University of Göttingen," Göttingen, vol. 1, 1930.

[24] S. Bochner, "Gustav Herglotz, Gesammelte Schriften," Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 1, 1979.

[25] R. Guenther, C. Guenther, and J. Gottsch, "The Herglotz Lectures on Contact Transformations and Hamiltonian Systems," Lecture Notes in Non-linear Analysis, 1996.

[26] M. J. Lazo, J. Paiva, J. T. Amaral, and G. S. Frederico, "An action principle for action-dependent Lagrangians: Toward an action principle to non-conservative systems," Journal of Mathematical Physics, vol. 59, 2018.

[27] E. Massa and E. Pagani, "On the Herglotz variational problem," Journal of Mathematical Physics, vol. 64, p. 102902, 2023.

[28] E. Massa and E. Pagani, "The non-holonomic Herglotz variational problem," Journal of Mathematical Physics, vol. 65, p. 16, 2024.

[29] M. Lazo, J. Paiva, and G. Frederico, "Noether theorem for action-dependent Lagrangian functions: conservation laws for non-conservative systems," Nonlinear Dynamics, vol. 97, pp. 1125–1136, 2019.

[30] B. Georgieva, R. Guenther, and T. Bodurov, "Generalized variational principle of Herglotz for several independent variables. First Noether-type theorem," Journal of Mathematical Physics, vol. 44, pp. 3911–3927, 2003.

[31] B. Georgieva and R. B. Guenther, "Second Noether-type theorem for the generalized variational principle of Herglotz," Topological Methods in Nonlinear Analysis, vol. 26, p. 307, 2005.

[32] B. Georgieva and R. Guenther, "First Noether-type theorem for the generalized variational principle of Herglotz," Topological Methods in Nonlinear Analysis, vol. 20, p. 261, 2002.

[33] P. Cannarsa, W. Cheng, K. Wang, and J. Yan, "Herglotz'generalized variational principle and contact type Hamilton-Jacobi equations," Trends in control theory and partial differential equations, pp. 39–67, 2019.

[34] G. Herglotz, Vorlesungen über die Mechanik der Kontinua: Unveröffentlichte Vorlesungen aus den Jahren 1926 und 1931, vol. 3. Springer-Verlag, 2013.

[35] M. J. Lazo, J. Paiva, J. T. Amaral, and G. S. Frederico, "Action principle for action-dependent Lagrangians toward nonconservative gravity: Accelerating universe without dark energy," Physical Review D, vol. 95, p. 101501, 2017.

[36] M. Visser, "Efficient computation of null affine parameters," Universe, vol. 9, p. 521, 2023.

[37] M. Henneaux and C. Teitelboim, Quantization of gauge systems. Princeton University Press, 1992.

[38] J. Bodenner and C. M. Will, "Deflection of light to second order: A tool for illustrating principles of general relativity," American Journal of Physics, vol. 71, pp. 770–773, 2003.

[39] J. Briët and D. Hobill, "Gravitational lensing by charged black holes," University of Calgary preprint, 2005.

[40] B. Carter, "Global structure of the Kerr family of gravitational fields," Physical Review, vol. 174, p. 1559, 1968.

[41] C. Gonera, J. Gonera, A. Jasiński, and P. Kosiński, "The families of Hamiltonians sharing common symmetry structure," Physical Review E, vol. 110, p. 064201, 2024.

[42] J. Hietarinta, B. Grammaticos, B. Dorizzi, and A. Ramani, "Coupling-constant metamorphosis and duality between integrable Hamiltonian systems," Physical Review Letters, vol. 53, p. 1707, 1984.

[43] Y. Mino, "Perturbative approach to an orbital evolution around a supermassive black hole," Physical Review D, vol. 67, p. 084027, 2003.

[44] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology. Wiley, 1972.

[45] F. Kottler Ann. d. Physik, vol. 361, p. 401, 1918.

[46] V. Perlick, "Gravitational lensing from a spacetime perspective," Living Reviews in Relativity, vol. 7, p. 4, 2004.

[47] R. Solanki, "Kottler spacetime in isotropic static coordinates," Classical and Quantum Gravity, vol. 39, p. 015015, 2021.

[48] G. McVittie, "The Mass-Particle in a Expanding Universe," Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 93, p. 325, 1933.

[49] S. V. Iyer and E. C. Hansen, "Strong and weak deflection of light in the equatorial plane of a Kerr black hole," arXiv 0908.0085.

[50] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, Nonlinear oscillations. Wiley, 1995.

[51] A. H. Nayfeh, Perturbation methods. Wiley, 2000.

[52] L. Landau and E. Lifshitz, Mechanics. Elsevier, 1976.

[53] C. R. Keeton and A. Petters, "Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects. I: Static, spherically symmetric case," Physical Review D, vol. 72, p. 104006, 2005.

[54] V. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer, 1978.

[55] W. Schmidt, "Celestial mechanics in Kerr spacetime," Classical and Quantum Gravity, vol. 19, p. 2743, 2002.

[56] S. Drasco and S. A. Hughes, "Rotating black hole orbit functionals in the frequency domain," Physical Review D, vol. 69, p. 044015, 2004.

[57] C. F. Paganini, B. Ruba, and M. A. Oancea, "Characterization of null geodesics on Kerr spacetimes," arXiv preprint arXiv:1611.06927, 2016.

[58] S. E. Gralla and A. Lupsasca, "Null geodesics of the Kerr exterior," Physical Review D, vol. 101, p. 044032, 2020.

[59] A. Cieślik, E. Hackmann, and P. Mach, "Kerr geodesics in terms of Weierstrass elliptic functions," Physical Review D, vol. 108, p. 024056, 2023.

[60] M. Walker and R. Penrose, "On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {22} spacetimes," Communications in Mathematical Physics, vol. 18, p. 265, 1970.

[61] S. Hod, "Fermat's principle in black-hole spacetimes," International Journal of Modern Physics D, vol. 27, p. 1847025, 2018.

[62] J. Gonera, P. Kosiński, and J. Piwnik, "Fermat's principle in constant gravitational field," International Journal of Modern Physics D, vol. 30, p. 2150094, 2021.