dr hab. Maciej P. Denkowski, prof. UJ
Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki
maciej.denkowski@uj.edu.pl

Kraków, 2 kwietnia 2025 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dra Grzegorza Oleksika

Dr Grzegorz Oleksik uzyskał tytuł magistra matematyki na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego w roku 2002 na podstawie pracy pt. *Twierdzenie Dvoretzky'ego* napisanej pod kierunkiem prof. dra hab. Wojciecha Banaszczyka. Następnie obronił w roku 2010 na tymże wydziale rozprawę doktorską w dziedzinie nauk matematycznych, w zakresie matematyki, pt. *Wykładnik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowanych*, której promotorem był prof. dr hab. Tadeusz Krasiński.

W latach 2002 – 2006 był zatrudniony jako asystent w Katedrze Analizy Matematycznej i Teorii Sterowania Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, gdzie w latach 2010 – 2023 kontynuował pracę na stanowisku adiunkta w grupie pracowników badawczo-dydaktycznych w Katedrze Geometrii Algebraicznej i Informatyki Teoretycznej. Od roku 2022 jest adiunktem Instytucie Matematyki Politechniki Poznańskiej. Nie znalazłem w dossier informacji o zatrudnieniu Habilitanta w latach 2006-2010, ale nie ma to znaczenia dla rozpatrywanego postępowania.

Zainteresowania naukowe i tematyka badawcza dra Grzegorza Oleksika obejmują teorię osobliwości na gruncie zespolonej geometrii analitycznej ze szczególną uwagą zwróconą na efektywne badania wykładników Łojasiewicza, przede wszystkim kiełków funkcyj holomorficznych.

Omówienie i ocena osiągnięcia naukowego

Dr Grzegorz Oleksik przedstawił do oceny osiągnięcie naukowe *Metody kombinatoryczne w teorii osobliwości zespolonych* w postaci cyklu sześciu prac z lat 2020 – 2023 (jedna tylko jest z roku 2016), w tym dwóch samodzielnych i czterech współautorskich. Tematycznie prace dotyczą:

– niezmienników osobliwości izolowanych, są to prace

[BKO21] Brzostowski, S., Krasiński, T., Oleksik, G., *The Łojasiewicz exponent in non-degenerate deformations of surface singularities*, Ann. Polon. Math. 127: 165-175, (2021);

[BKO23] Brzostowski, S., Krasiński, T., Oleksik, G., *The Łojasiewicz exponent of nondegenerate surface singularities*, Canad. Math. Bull. 66: 1391-1410, (2023);

[BO16] Brzostowski, S., Oleksik, G., *On combinatorial criteria for non-degenerate singularities*, Kodai Math. J. 39: 455-468, (2016);

– nieizolowanych punktów krytycznych,

[EOR21] Eyral, Ch., Oleksik, G., Różycki, A., *Lê numbers and Newton diagram*, Adv. Math. 376: 1-21, 107441, (2021);

[Ole20] Oleksik, G.,*On a generic dimension of the critical locus*, Results Math. 75: 1-9, (2020);

– wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności wielomianów wagowo jednorodnych,

[Ole22] Oleksik, G., *The Łojasiewicz exponent of weighted homogeneous polynomials at infinity*, Kyoto J. Math. 62: 403-415, (2022).

Motywację (wynikającą ze słynnych pytań Arnolda) wraz ze szczegółowym omówieniem wyników wyżej wymienionych prac, składających się na osiągnięcie naukowe, znajdujemy w przejrzyście i zwięźle przygotowanym autoreferacie. Tutaj ograniczę się więc do krótkich podsumowań każdego ze wspomnianych artykułów.

W pracy [BKO21] udowodniono piękny, efektywny wzór, wyliczający wykładnik Łojasiewicza kiełka holomorficznego $f\colon (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ określającego niezdegenorawną (w sensie Kusznirenki) osobliwość izolowaną (Twierdzenie 4.8 w autoreferacie). Mowa tu o wykładniku optymalnym (czyli najmniejszym) $\text{Ł}_0(f)$ nierówności $||\mathrm{grad} f(x)|| \geqslant \mathrm{const.}||x||^\alpha$ $(||x|| \ll 1)$. Należy tu zaznaczyć, że iloraz $\frac{\text{Ł}_0(f)}{\text{Ł}_0(f)+1}$ jest najmniejszym wykładnikiem $\theta \in (0, 1]$, przy którym spełniona jest klasyczna nierówność gradientowa Łojasiewicza, czyli $||\mathrm{grad} f(x)|| \geqslant \mathrm{const.}|f(x)|^\theta$ $(||x|| \ll 1)$, co wykazał B. Teissier w [Tes77] (cytowania zamieszczam z odnośnikami do listy zamieszczonej w autoreferacie). Ta postać nierówności ma szerokie pole zastosowań, co tłumaczy też istotę badania wykładnika $\text{Ł}_0(f)$. Być może warto było w autoreferacie o tym wspomnieć.

Uzyskanie wzoru z [BK021] wymagało pomysłowości i sprawności technicznej. Jest to przeniesienie na przypadek trójwymiarowy rezultatu A. Lenarcika z [Len98] opartego na pomyśle W. Kucharza z [Kuch91] użycia tzw. odcinków krańcowych. W trzech wymiarach należało wprowadzić odpowiednie pojęcie ścian krańcowych.

Wynik z [BKO21] okazał się być doskonałym narzędziem do badania własności ciągłości wykładnika Łojasiewicza jednoparametrowej deformacji holomorficznej f_t kiełka $f = f_0$. Posłużył mianowicie autorom do potwierdzenia hipotezy Teissiera, że w trzech wymiarach i w przypadku, gdy rodzina (f_t) ma stałą liczbę Milnora (oczywiście zakładamy, że f zadaje osobliwość izolowoaną niezdegenerowaną) i f_t również są niezdegenerowane, mamy stałość wykładników: $\mathcal{L}_0(f_t) \equiv \mathcal{L}_0(f)$, $|t| \ll 1$. To z kolei oznacza, z uwagi na fakt, że liczba Milnora jest niezmiennikiem topologicznym, że teza ta pozostaje prawdziwa, gdy zastąpimy μ-stałość założeniem topologicznej równoważności powierzchni $f_t^{-1}(0)$.

W kolejnych pracach uwaga skierowana jest na wymiar zbioru punktów krytycznych Σf kiełka $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, gdzie nie narzuca się koniecznie warunków na n, wymagając głównie, by osobliwość była niezdegenerowana w sensie Kusznirenki. Swego rodzaju łącznikiem pomiędzy pierwszymi dwiema pracami cyklu, poświęconymi osobliwościom izolowanym, a kolejnymi dwiema jest najstarsza z przedstawionego cyklu praca [BO16], w której autorzy uzyskują, przy założeniu niezdegenerowania, twierdzenie odwrotne do znanego faktu, że nośnik osobliwości izolowanej spełnia warunek Kusznirenki, tzn. wynik jest następujący: niezdegenerowana osobliwość, której nośnik spełnia wspomniany warunek, musi być izolowana. Jest to ładny wynik, uzyskany wcześniej przez A. Lenarcika dla $n = 2$ oraz Habilitanta dla $n \leqslant 3$. Znaczenie problemy można podkreślić faktem, że z nieco innym pojęciem niezdegenerowania podobne rezultaty otrzymał C.T.C. Wall. Skądinąd prosty przykład 4.20 w autoreferacie pokazuje też, że jakiś wymóg niezdegenerowania jest konieczny. Warto też odnotować, że autorzy [BO16] uzupełniają oryginalną pracę Kusznirenki o dowód równoważności jego warunku ze skończonością liczby Newtona.

W duchu [BO16], w artykule [Ole20] Autor pokazuje ogólnie dla osobliwości niezdegenerowanej, że kiełek Σf jest d-wymiarowy dokładnie wtedy, gdy jego nośnik spełnia d- lecz nie $(d-1)$-warunek Kusznirenki. Jest to jednakże rezultat dowiedziony na razie tylko w przestrzeni co najwyżej trójwymiarowej, choć Habilitant zapowiada w autoreferacie przeniesienie go na wyższe wymiary. Należy tu podkreślić, że praca prowadzona z diagramami Newtona z reguły odbywa się w trzech etapach – przypadek dwu zmiennych jest naturalnym początkiem jako względnie łatwy – przynajmniej do wyobrażenia sobie – co nie znaczy, że łatwy do zbadania; przejście do trzech zmiennych bardzo często dostarcza już nowych problemów geometrycznych; na koniec wreszcie uogólnienia dla $n > 3$ mogą, choć nie muszą, odbywać się według podobnego toku rozumowania co dla $n = 3$, przy czym nadal nie oznacza to wcale, że są proste do uzyskania.

Na szczególną uwagę w [Ole20] zasługują też dwa wnioski, a mianowicie, wg numeracji autoreferatu, wniosek 4.28: jeśli kiełek holomorficzny g, $n \leqslant 3$ zmiennych, określa osobliwość niezdegenerowaną a jej nośnik zawiera nośnik osobliwości f, to $\dim_0 \Sigma g \leqslant \dim_0 \Sigma f$; oraz wniosek 4.29 (wraz z przykładem 4.30 na zaniechanie założenia o niezdegenerowaniu), czyli $\dim_0 \Sigma(f+g) \leqslant \min\{\dim_0 \Sigma f, \dim_0 \Sigma g\}$, gdy $f + g$ zadaje osobliwość niezdegenerowaną a oba kiełki mają nośniki rozłączne. Przy czym w autoreferacie przy obu tych wynikach błednie pojawia się odnośnik do pracy

[Ole13a], gdy tymczasem chodzi jednak bez wątpienia o artykuł [Ole20]. Do wniosków można też zaliczyć drugie ważne twierdzenie z [Ole20], orzekające, że dwie osobliwości niezdegenerowane mają zbiory krytyczne tego samego wymiaru, jeśli mają ten sam diagram Newtona.

Najbardziej zaawansowane techniki wykorzystuje praca [EOR21], dotycząca też bardzo ważnego uogólnienia na przypadek osobliwości nieizolowanej twierdzenia Kusznirenki. Autorzy mianowicie podają pewien algorytm wyznaczania liczb Lê osobliwości niezdegenerowanej $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ za pomocą pewnych niezmienników diagramu Newtona kiełka $f(z_1, \ldots, z_n) + z_1^{\alpha_1} + \ldots + z_1^{\alpha_d}$, gdzie $d = \dim_0 \Sigma f$ a liczby naturalne α_j są dostatecznie duże. W rezultacie udaje się im także i tu pokazać, że liczby Lê zależą wyłącznie od diagramu Newtona osobliwości niezdegenerowanej. Te rezultaty w pełni zasłużenie opublikowane są w *Advances in Mathematics*. Skądinąd byłoby interesujące zobaczyć interpretacje użytych w konstrukcji pojęć, odwołujących się do cyklów przecięć, w języku geometryczno-analitycznym teorii przecięć w ujęciu P. Tworzewskiego.

Ostatnia praca cyklu, [Ole22] jest przejściem od badań lokalnych, do badań wielomianów w nieskończoności, a więc w pewnym sensie problemu dualnego. Oczywiście w tle czai się odwieczna hipoteza jakobianowa, wobec której chyba nikt nie pozostaje obojętny. Pojawia się ona naturalnie w tym kontekście ze względu na równoważność pomiędzy właściwością odwzorowania wielomianowego $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ a dodatniością jego wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności $\ell_\infty(F)$, czyli największej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$, przy której $||F(x)|| \geqslant \mathrm{const.}||x||^\alpha$, gdy $||x|| \gg 1$. I tak, w [Ole22] znajdujemy dowiedzione niejako przy okazji innych rozważań potwierdzenie hipotezy jakobianowej w przypadku odwzorowań wielomianowych wagowo i ogólniej, pre-wagowo jednorodnych z dodatnimi wagami. Głównym wynikiem pracy jest jednak co innego, a mianowicie wzór na wykładnik $\pounds_\infty(f) = \ell_\infty(\mathrm{grad} f)$ (gdy $\mathrm{grad} f$ ma skończenie wiele zer) dla zespolonego wielomianu wagowo jednorodnego f z wagami $\geqslant 2$, będący odpowiednikiem wzoru lokalnego. W przypadku kiełka f wagowo jednorodnego o wagach $\geqslant 2$, określającego osobliwość izolowaną, z prac [KOP09], [Brz15] i [Abd16] wynika, że wykładnik $\pounds_0(f)$ jest największą z wag pomniejszoną o jeden. W nieskończoności natomiast największą należy zastąpić najmniejszą. Naturalnie nie ma prostego przejścia z sytuacji lokalnej do nieskończoności.

Omówione tutaj artykuły przedstawione jako osiągnięcie naukowe stanowią niewątpliwie spójny tematycznie cykl prac, z których każda opublikowana jest w uznanym czasopiśmie o międzynarodowym zasięgu, a jedna z nich, współautorska, w znakomitym wręcz czasopiśmie *Advances in Mathematics*. Prace te nie są jeszcze cytowane (nie wliczam tu oczywiście autocytowań), co w przypadku wyników z tej konkretnej tematyki do pięciu lat po ich publikacji nie jest szczególnie dziwne, a już artykuł [BO16] ma trzy cytowania zewnętrzne wg baz WoS i MathSciNet. Rozważane w tych artykułach problemy dotyczące niezmienników osobliwości zespolonych (chodzi o wykładniki Łojasiewicza, liczby Lê oraz wymiar zbioru punktów krytycznych) i ich związków z diagramami Newtona były postawione przed półwieczem przez V. I. Arnolda, lecz nadal są aktualne i pozostają w kręgu badań prowadzonych na świecie. Wciąż zresztą ukazują się nowe prace z tej tematyki, toteż i cytowania się na pewno z biegiem czasu pojawią. Starsze artykuły spoza cyklu, jak np. [Ole09b] czy [Ole13b], mają po trzy, cztery cytowania zewnętrzne, o [KOP09] nie wspominając (jest to najwięcej cytowana publikacja Habilitanta: 14 cytowań zewnętrznych).

Wszystkie prace z cyklu są bardzo dobrze napisane, zawierają pomysłowo i przejrzyście przeprowadzone dowody, dobre odnośniki do literatury jak też nakreślenie zagadnień na szerokim tle, z podaniem motywacyj podejmowanych badań. Autorzy, a więc i Habilitant, niewątpliwie trwale wpisują się w uprawiany dział teorii osobliwości. Podejrzewam, że niektórzy mogą uważać za słabszą stronę wniosku fakt, że aż cztery spośród prezentowanych sześciu prac cyklu napisane są we współautorstwie. Moim jednak zdaniem nie umniejsza to istotnie zasług Habilitanta – raczej dowodzi umiejętności współpracy; tym bardziej, że skład współautorów jednak nie pozostaje stały i ostatecznie wykracza poza ośrodek, z którego wywodzi się Habilitant. Poza tym udział każdego ze współautorów jest dość jasno określony, na ile to oczywiście w ogóle jest możliwe w matematyce, gdzie – jak wiadomo – aktywny udział w prowadzonych rozważaniach jest kluczem do sukcesu osiąganego nieraz dosłownie wspólnie, tak, że rozgraniczenie, kto jaki wniósł wkład, staje się niewykonalne. Odnotować należy przy tym zasługi Habilitanta również jako proponującego tematy badań, co w kontekście ubiegania się o habilitację ma kapitalne znaczenie.

Ocena aktywności naukowej Habilitanta

Poza omówionymi wyżej sześcioma pracami stanowiącymi osiągnięcie naukowe będące podstawą postępowania habilitacyjnego, dr Oleksik jest autorem i współautorem dalszych 13 artykułów naukowych, z czego cztery powstały przed doktoratem. Wszystkie są zwięźle acz precyzyjnie opisane w autoreferacie. Wśród tych trzynastu prac spoza cyklu, sześć ukazało się w materiałach konferencyjnych lub jako rozdziały monografii UŁ, mając po części charakter przeglądowy, w tym dwie z nich w języku polskim. Z pozostałych siedmiu artykułów, tylko praca współautorska [KOP09], będąca częścią doktoratu, opublikowana jest w znaczącym, wysoko punktowanym czasopiśmie. Samodzielnych prac jest na tej liście osiem. Punkty ministerialne nie są absolutnym wyznacznikiem wartości czasopism, ani tym bardziej samych publikacyj. I faktycznie, jeśli sprawdzimy cytowania, to widzimy, że na przestrzeni lat aktywności naukowej, czyli od 2008 roku, ich liczba jest rzędu 30-40 (zależy od bazy danych), gdy usuniemy autocytowania. Wspominałem zresztą o tym wyżej. Na tym etapie kariery i w dziedzinie reprezentowanej przez Habilitanta, przy dosyć wąskiej specjalizacji, jest to bardzo dobry wynik. Również sławetny indeks Hirscha, który mimo wszystko jakieś pojęcie o dorobku naukowym daje, jest w mojej ocenie bardzo dobry, bo wynosi 4, jeśli pominie się autocytowania. Dr Oleksik publikuje regularnie a jego artykuły spoza cyklu nie odbiegają znacząco poziomiem od tych przedstawionych jako osiągnięcie naukowo, choć ukazały się w słabiej punktowanych czasopismach.

Można by wysunąć zarzut nader ograniczonego pola prowadzonych przez Habilitanta badań. Poza pracą [Ole11] stanowiącą wręcz pewien punkt osobliwy w całym dorobku, bo sytuującą się na pograniczu probabilistyki, statystyki i informatyki, wszystkie prawie artykuły krążą wokół wykładnika Łojasiewicza, czy osobliwości hiperpowierzchni, często izolowanych i niezdegenerowanych. Jednakże wachlarz uzyskiwanych wyników jest przy tym na tyle szeroki i różnorodny, że nie traktowałbym takiego zarzutu nadto poważnie, tym bardziej, że nawet przy pobieżnym przejrzeniu omawianych artykułów, uderza duża biegłość autorów i doskonałe obeznanie z tematyką. Co więcej prace te są wartościowym wkładem w dziedzinę. Habilitant niewątpliwie może być uznany za specjalistę w zakresie różnorakich zagadnień wynikających z pytań Arnolda, a te stanowią może i względnie wąski, jednak bardzo istotny wycinek teorii osobliwości. Zresztą prace Habilitanta nieprzypadkowo zahaczają o tak ważne zagadnienia jak hipoteza Zariskiego czy jakobianowa, które, jak powszechnie wiadomo, stanowią niebagatelną siłą napędową wielu współczesnych badań w tej dziedzinie.

Aktywność naukowa Habilitanta nie budzi najmniejszych zastrzeżeń. Współpraca z grupą teorii osobliwości w IM PAN (Ch. Eyral, Z. Jelonek) i aktywny udział w seminariach tamże, czy z Politechniką Świętokrzyską (A. Lenarcik, śp. A. Płoski) czynią zadość wymogowi aktywności w więcej niż jednej uczelni czy instytucji naukowej. Ponadto dr Oleksik był kierownikiem zrealizowanego grantu NCN Miniatura 2 *Wykładnik Łojasiewicza wielomianów rzeczywistych i zespolonych*, w ramach którego odbył dwutygodniowe konsultacje naukowe w Wietnamie w Hanoi w ośrodku Vietnam Advanced Study of Mathematics w marcu 2019 roku, odwiedzając tam prof. Tien Son Phama, uznanego specjalistę, zajmującego również poczesne miejsce w matematyce stosowanej. Skoro już o grantach mowa, prócz tego grantu, dr Oleksik brał udział w charakterze wykonawcy w grancie dra A. Lenarcika *Niezmienniki osobliwości krzywych i hiperpowierzchni analitycznych* w latach 2008-2012 oraz w grancie NCN *Sumy kwadratów a wykładnik Łojasiewicza* prof. St. Spodziei w latach 2013-2017.

Na przestrzeni lat dr Oleksik regularnie uczestniczył, i to z referatami, w wielu konferencjach naukowych, w tym międzynarodowych jak w Będlewie czy poznańskim zjeździe PTM i Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego DMV, seminariach IM PAN, czy cyklicznych ogólnopolskich spotkaniach jak Gdańsko-Krakowsko-Łódzko-Warszawskie seminarium z teorii osobliwości, czy spotkania Łódzko-Kieleckie, nie wspominając już o dorocznych Konferencjach Szkoleniowych z Geometrii Algebraicznej i Analitycznej w Łodzi, których był sekretarzem szereg lat. Brakuje w tym wykazie może nieco konferencyj odbywających się za granicą, co, jak można domniemywać, spowodowane jest brakiem odpowiednich funduszy na wyjazdy. Godnym odnotowania wyjątkiem jest tutaj czynny udział z referatem w *Mini-course on Moments, Positive Polynomials and Applications*, konferencji międzynarodowej w Hanoi, w Wietnamie, co umożliwił Habilitantowi grant Miniatura.

Nie można wreszcie pominąć tutaj też działalności dydaktycznej i organizacyjnej wymienionych w autoreferacie. Zwraca uwagę duże zaangażowanie Habilitanta i ciągłe poszerzanie kompetencji, w szczególności udział w rozwijaniu nowego kierunku studiów *Analiza danych* czy przygotowanie skryptu z kryptografii.

Konkluzja:

W mojej ocenie wyniki uzyskane w omawianym osiągnięciu naukowym stanowią znaczący wkład w rozwój teorii osobliwości zespolonych. Nie mam wątpliwości, że dr Grzegorz Oleksik spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe dla nadania mu stopnia doktora habilitowanego zapisane w artykule 219 ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* z dnia 20 lipca 2018 roku. Popieram z pełnym przekonaniem wniosek o nadanie drowi Grzegorzowi Oleksikowi stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka.

dr hab. Maciej Denkowski, prof. UJ