UNIWERSYTET WARSZAWSKI | UW MIM

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki
prof. dr hab. Jarosław A. Wiśniewski

3 czerwca 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Kacpra Grzelakowskiego
"Calabi-Yau threefods with triple points and type III contractions"

Rozmaitości Calabi-Yau stanowią jedną z najciekawszych klas rozmaitości zwartych badanych w geometrii algebraicznej i zespolonej. Geometria biwymierna tych rozmaitości, która była intensywnie badana w latach 90. zeszłego wieku ze względu na relacje z pytaniami postawionymi przez fizyków, niezmiennie stanowi ważny obszar badań dla kolejnych pokoleń geometrów algebraicznych. Ważna część tych badań odnosi się do koncepcji łączenia rodzin rozmaitości Calabi-Yau przez ich biwymierne modyfikacje i deformacje; koncepcja ta została sformułowana przez Milesa Reida w latach 80. zeszłego wieku.

Recenzowana rozprawa doktorska dotyczy zastosowania tej koncepcji w przypadku konstrukcji, której kolejne kroki są przeprowadzone według następującej recepty: (1) Znajdź osobliwą rozmaitość Calabi-Yau $\overline{X}$, która zawiera stożek nad krzywą i ma osobliwość typu potrójny punkt w jego wierzchołku, a ewentualne pozostałe osobliwości leżą na tym stożku i mają małe rozwiązania. (2) Rozdmuchaj rozmaitość $\overline{X}$ w wierzchołku stożka, rozwiąż małe osobliwości. (3) Pokaż, że uzyskana w ten sposób rozmaitość X zawiera powierzchnię prostokreślną powstałą ze stożka, którą można ściągnąć, żeby dostać osobliwą rozmaitość Y (ściągnięcie typu III). (4) Wygładź rozmaitość Y biorąc jej małą deformację $\widetilde{Y}$. (5) Na koniec policz niezmienniki otrzymanej w ten sposób rozmaitości.

Przedstawiona powyżej konstrukcja jest już klasyczna: w 2009 roku miałem okazję recenzować pracę doktorską dra hab. Grzegorza Kapustki, promotora

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

obecnie recenzowanej rozprawy, który zajmował się przypadkiem, kiedy ściągnięcie $X \longrightarrow Y$ jest typu II.

Zawartość rozprawy.

Dla pomyślnego zastosowania przedstawionej powyżej receptury, kluczowy jest odpowiedni wybór rozmaitości $\overline{X}$ wraz z zawartym w niej stożkiem $\overline{E}$, tak aby uzyskać osobliwości spełniające oczekiwane warunki. W rozdziale trzecim recenzowanej rozprawy rozmaitość $\overline{X}$ jest otrzymywana jako dywizor stopnia 5 w $\mathbb{P}^4$, oznaczany jako $\overline{X}_5$, albo jako zupełne przecięcie typu $(2,4)$ lub $(3,3)$ w $\mathbb{P}^6$, oznaczane jako $\overline{X}_{2,4}$ lub $\overline{X}_{3,3}$, albo jako sekstyka w ważonej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ oznaczana $\overline{X}_6$. Najpierw dobiera się krzywą C, która jest podstawą stożka, a następnie wybiera dostatecznie ogólny dywizor z systemu liniowego (lub parę dywizorów w przypadku zupełnego przecięcia) zawierającego zadany już stożek $\overline{E}$, aby uzyskać $\overline{X}$. Krzywa C zawarta jest w znanej powierzchni del Pezzo, która jest stopnia 3 w $\mathbb{P}^3$, co pozwala dobrze kontrolować jest niezmienniki. Istotne dla powodzenia całej tej konstrukcji obliczenia pokazują, że osobliwości, które tak skonstruowane $\overline{X}$ może zawierać, są takie jak oczekiwano.

W krótkim rozdziale czwartym rozprawy przeprowadzone są obliczenia, które mają pokazać, że dywizor E będący podniesieniem stożka $\overline{E}$ do rozmaitości X powstałej przez rozwiązanie osobliwości $\overline{X}$ można ściągnąć. W tym celu policzono klasy numeryczne istotnych dywizorów i krzywych w X, które powstały w wyniku opisanej poprzednio konstrukcji. W rozdziale piątym policzono liczby Hodge'a rozmaitości Calabi-Yau $\widetilde{Y}$ otrzymanej przez wygładzenie rozmaitości Y, która z kolei powstała przez ściągnięcie dywizora $E \subset X$. Obliczenia używają metod pochodzących od prof. Sławomira Cynka, do prac którego autor rozprawy w tym rozdziale wielokrotnie się odnosi.

Rozdział szósty rozprawy zawiera uwagi dotyczące geometrii poszczególnych klas rozmaitości, którymi autor zajmuje się w rozdziałach poprzednich. Geometria rozmaitości X jest tutaj analizowana pod kątem wyboru krzywej C i pochodzącego od niej stożka $\overline{E}$ oraz zawierającej je rozmaitości $\overline{X}$. Zasadnicze jest rozstrzygnięcie, czy powierzchnia prostokreślna $E \subset X$ jest ściągalna za pomocą ściągnięcia typu III. System liniowy, który determinuje to ściągnięcie zależy od typu wybranej krzywej, więc szczegółowa analiza jest rozbita na sze-

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

reg przypadków. Jest to kulminacja konstrukcji przeprowadzanej w rozprawie i korzysta się tutaj z rezultatów z poprzednich rozdziałów.

Kolejne rozdziały, od siódmego do dziewiątego, autor nazwał dodatkami. W pierwszym z nich zajmuje się problemem nie powiązanym bezpośrednio z przeprowadzaną w rozprawie konstrukcją, ale pojawiającym się w kontekście głównego wątku pracy, mianowicie ograniczeniem na maksymalną liczbę potrójnych punktów na zupełnych przecięciach Calabi-Yau. Następny dodatek zawiera dyskusję i pytania dotyczące możliwych uogólnień kontrukcji przeprowadzonej w pracy. Na koniec, dodatek C, czyli rozdział dziewiąty, zawiera tabele podsumowujące własności klas rozmaitości skonstruowanych w rozprawie. Dla każdej z klas $\overline{X}_5$, $\overline{X}_{2,4}$, $\overline{X}_{3,3}$ i $\overline{X}_6$ podano niezmienniki krzywych C, które mogą być zastosowane w konstrukcji, klasę dywizora determinującego ściągnięcie odpowiadającej temu wyborowi rozmaitości X oraz liczby Hodge'a rozmaitości $\widetilde{Y}$ będącej końcowym efektem tej konstrukcji. Zestawienia przedstawione w tabelach ułatwiają zrozumienie zawartości pracy.

Ocena rozprawy.

W warstwie merytorycznej moja ocena rozprawy jest zasadniczo pozytywna. Rozprawa dotyczy istotnych problemów współczesnej matematyki, tematyki już ugruntowanej. Idea przeprowadzonej konstrukcji przemiany rozmaitości Calabi-Yau i policzenie niezmienników uzyskanych rozmaitości są oparte na przetestowanych już wzorach, ale wymagają od autora ich twórczej adaptacji i wykazania inwencji dla pokonania pojawiających się problemów technicznych. Przedstawione rozumowania, które ze względu na liczbę przypadków są trudne do dokładnego sprawdzenia, wydają się być prawidłowe i przedstawione w sposób weryfikowalny.

Zdecydowanie gorzej wypada moja ocena układu treści w rozprawie i sposobu ich prezentacji. Mam wrażenie, że autor przyjął założenie, dosyć powszechne u młodych naukowców, że czytelnik dysponuje co najmniej taką wiedzą jak on sam. Jest to być może uzasadnione w przypadku artykułów badawczych przeznaczonych dla wąskiego grona specjalistów, ale nie do przyjęcia w przypadku rozprawy doktorskiej, w której autor powinien się wykazać umiejętnością komunikacji również z mniej wytrawnym czytelnikiem. Prezentacja rezultatów powinna być poprzedzona odpowiednim wprowadzeniem i przeprowadzona w

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

sposób przyjazny dla czytelnika, co jest to szczególnie ważne w sytuacji, kiedy rozumowania dotyczą wielu przypadków, tak jak w recenzowanej rozprawie. W tym kontekście doceniam podsumowanie rezultatów przedstawione w tabelach na końcu rozprawy.

Rozdziały 1 i 2, czyli wstęp i wprowadzenie w teorię, której dotyczy praca, są napisane, moim zdaniem, nie dosyć starannie, co nie robi dobrego wrażenia na czytelniku. Już w pierwszym akapicie pojawia się zbitka "integral reduced", podczas gdy "integral" to to samo co "reduced and irreducible". W pierwszej pojawiającej się definicji 2.1 nie zakłada się, że rozmaitość Calabi-Yau jest normalna, podczas gdy we wstępie w drugim zdaniu jest to założenie.

Istotnym mankamentem pracy są niedociągnięcia przy podawaniu odnośników spoza czy z wewnątrz pracy, przy czym tych drugich generalnie brakuje. Na przykład, pierwszy pojawiający się rezultat, Stwierdzenie 1.1, jest dowiedziony w pracy jako Stwierdzenie 5.17, ale nie ma wewnętrznego odnośnika łączącego te dwa stwierdzenia.

Brak przemyślanej koncepcji przekazania czytelnikowi istotnych wstępnych informacji jest szczególnie widoczny przy prezentacji kluczowego dla pracy pojęcia "przemiany" czyli "transition" rozmaitości Calabi-Yau. Pojęcie to pojawia się we wstępnie jako "extremal transition" i jest zdefiniowane jako "geometric transition" w rozdziale drugim. We wstępie, pojęcie przemiany jest omówione dosyć ogólnie, przy czym diagram na stronie 5 wyjaśniający naturę przemiany i wprowadzający notację używaną w pracy jest bardzo pomocny (strzałkę odpowiadającą deformacji warto by oznaczyć inaczej niż strzałki oznaczające morfizmy, na przykład przez $\rightsquigarrow$, "rightsquigarrow"). W podrozdziale 2.2 autor nie mógł się zdecydować czy pojęcie to omówić w sposób syntetyczny, przedstawiając wyłącznie istotne dla rozprawy informacje (tak jak w podrozdziale 2.1, gdzie jednak zaniedbał podanie jakichkolwiek odnośników), czy przedstawić wszystkie techniczne rezultaty połączone z tym pojęciem. Mamy więc zacytownych 7 rezultatów pod rząd, prawie bez komentarza: jeden techniczny lemat, jedno stwierdzenie i pięć twierdzeń, przy czym część bez odnośników, część z pomylonymi odnośnikami (praca [18] pomylona z pracą [17]). Mam wątpliwości czy podawanie wszystkich tych rezultatów jest niezbędne, bo nie widzę odnośników do większości z nich w rozprawie. Na koniec tego podrozdziału, po krótkim rozumowaniu, autor sformułował wniosek 2.21, którego tezą

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

jest istnienie deformacji przemiany otrzymanej ze ściągnięcia typu III do przemiany stożkowej, "conifold transition". Czytelnik może się domyślać co to jest deformacja przemiany lub sam poszukać w literaturze, bo autor tego nie wyjaśnił.

Problemy redakcyjne pojawiają się nie tylko w pierwszych dwóch rozdziałach rozprawy. Znamienny jest sposób w jaki autor podał "kody" w częściach 9.1 i 9.2 rozprawy. Owszem, czytelnik może się domyśleć, że podane linijki są częścią jakiegoś kodu liczącego coś (defekt?) w Macaulay2 (nazwa Maculay2 nie pojawia w tej części), ale w zasadzie to wszystko. Ta część rozprawy jest dla mnie zupełnie nieczytelna, co jest jej bardzo poważnym mankamentem, ponieważ ważnym rezultatem rozprawy jest obliczenie niezmienników rozmaitości, które są wynikiem przeprowadzonej przez autora konstrukcji. Jeśli dla tego celu autor korzysta z obliczeń w Macaulay2, o czym napisał w ostatnim akapicie wstępu, to niezbędne jest przedstawienie pełnych kodów wraz w wyjaśnieniami.

Na koniec pozwolę sobie podać przykład anegdotyczny braku przemyślanej koncepcji przekazu: to Rysunek 1 na stronie 33, który - w mojej opinii - niczego nie wyjaśnia.

Konkluzja.

Przestawione powyżej uwagi dotyczące mankamentów redakcyjnych pojawiających się w recenzowanej rozprawie nie są ich kompletną listą, ale stanowią ilustrację najbardziej typowych nieodciągnieć, które w mojej ocenie powinny zostać usunięte dla przyjęcia rozprawy i dopuszczenia do obrony.

W porządku prawnym przed wejściem w życie Ustawy z dn. 20.07.2018, Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2018, poz. 1668) istniała możliwość skierowania przez recenzenta rozprawy doktorskiej do poprawy w trybie przewidzianym w par. 6 ust. 6 Rozporządzenia MNiSzW z dn. 19.01.2018 (Dz. U. z dn. 30.01.2018, poz. 261). Po wejściu w życie ww. ustawy, w wewnętrznych regulacjach niektóre uczelnie, na przykład Uniwersytet Warszawski (Uchwała Senatu UW nr 481 z dn. 16.10.2019, w sprawie określenia sposobu postępowania w sprawie nadania stopnia doktora oraz stopnia doktora habilitowanego na Uniwersytecie Warszawskim[1] zał. 1, par. 25 ust. 4), zachowały możliwość

[1]https://monitor.uw.edu.pl/Lists/Uchway/Attachments/5094/M.2019.340.U.481.pdf

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl

poprawiania pracy doktorskiej na wniosek recenzenta. Taka możliwość byłaby ze wszech miar wskazana w przypadku recenzowanej rozprawy, która przy pozytywnej ocenie jej merytorycznej zawartości zawiera zbyt wiele usterek redakcyjnych bym mógł ją rekomendować do przyjęcia.

W związku z brakiem możliwości skierowania pracy do poprawek, mając na uwadze przedstawione w recenzji istotne niedociągnięcia redakcyjne, oceniam rozprawę negatywnie.

Podpisany elektronicznie przez
Jarosław Wiśniewski; Uniwersytet Warszawski
03.06.2022
15:35:30 +02'00'

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 455
e-mail: J.Wisniewski@mimuw.edu.pl