Uniwersytet Pedagogiczny
im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

prof. dr hab. Tomasz Szemberg

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
Polska

Szemberg · Matematyka · UP Kraków · 30-084 Kraków · Polska

Tel: +48 12 6626279
Fax: +48 12 6372243
E-mail: szemberg@up.krakow.pl

Kraków, 29 maja 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej
Calabi-Yau threefolds with triple points and type III contractions
mgra Kacpra Grzelakowskiego

Przedstawiona rozprawa dotyczy konkretnej metody konstrukcji rozmaitości Calabi-Yau wymiaru trzy. Umiejscowiona jest w geometrii algebraicznej, wykorzystuje metody geometrii biwymiernej.

Rozprawa składa się z dwóch części o charakterze wstępnym (Introduction oraz Preliminary notions), czterech zasadniczych rozdziałów z numerami 3-6, trzech załączników (części 7-9) oraz spisu literatury zawierającego 44 pozycje, w tym program do obliczeń symbolicznych oraz katalogi online rozmaitości Calabi-Yau.

Literatura dobrana jest odpowiednio do przedmiotu badań. Zawiera zarówno prace z ostatnich lat, jak też fundamentalne prace dotyczące wyżej wymiarowej geometrii biwymiernej z końca lat 80-tych i początku lat 90-tych XX wieku. Pewne wątpliwości merytoryczne może budzić odwoływanie się do preprintu z 2003 roku (pozycja [40]). Literatura opracowana jest solidnie, choć nie wiadomo czemu Rams cytowany jest po Reid, Kloosterman po Kollár a pozycja [27] nie ma roku wydania.

Część wstępna potraktowana jest dość skrótowo. Zarysowane są w niej główne wyniki, aspekt motywacji mógłby być bardziej rozbudowany. Zasygnalizowany jest też fakt, że część wyników została osiągnięta w oparciu o obliczenia komputerowe. Zastosowane konkretne metody obliczeniowe są przedstawione w Appendix C, co w zasadzie pozwala na ich weryfikację. Wprowadzenie na szeroką skalę specjalistycznego oprogramowania do warsztatu badawczego matematyki jest procesem obserwowanym od wielu lat, w pełni uzasadnionym zmieniającą się rzeczywistością, w której prowadzone są badania. Nawet jeśli tradycyjnie badania matematyczne postrzegane są jako czysto teoretyczne, to zmieniający sie paradygmat metodologii badań i ich uzupełnienie o aspekt eksperymentalny nie są obecnie kwestionowane.

Części wstępne rozprawy zawierają pewne nieścisłości. Na przykład w pierwszym zdaniu rozdziału 1 w defenicji rozmaitości Calabi-Yau pojawia się warunek $h^2(\mathcal{O}_X) = 0$. Natomiast w formalnej definicji 2.1 tego warunku nie ma. Został zapomniany, jest niepotrzebny? Po drodze jest jeszcze mowa o "non-algebraic Calabi-Yau threefolds", które w ogóle nie są zdefiniowane. Mimo, że cała praca dotyczy rozmaitości zespolonych, w definicji 2.5 pojawia się ciało K wymiaru d. Co to właściwie znaczy, jaki wymiar ciała autor ma na myśli i dlaczego w ogóle odchodzi od liczb zespolonych? A może wymiar d odnosi się do rozmaitości X? Jeśli tak, to jest to źle napisane. W części 2.1 rozprawy słowo "cone" używane jest nieco beztrosko. Na przykład $\overline{NE}(X)$ jest stożkiem domkniętym, zawierającym 0 i zawierającym nieujemne kombinacje liniowe generatorów. Stożek $Amp(X)$ jest z kolei otwarty i nie zawiera wierzchołka. Natomiast stożek W jest również domknięty ale zawiera zarówno dodatnie jak i ujemne krotności swoich generatorów. W definicji 2.11 powinno być dokładnie określone co oznacza $H^{1,1}(X)$, w szczególności jakie współczynniki są wykorzystywane do zdefiniowania tej grupy kohomologii. W części 2.1 definiowane są dość elementarne pojęcia takie jak "ample" lub "nef" wiązki liniowe. Tymczasem w części 2.2 pojawia się znienacka i bez definicji przestrzeń deformacji $Def(Y)$, w Propozycji 2.15 "crepant resolution" i osobliwość Gorensteina. Dyskusja po Twierdzeniu 2.2 jest jeszcze bardziej kryptyczna.

Problemy z notacją i ścisłością nasilają się w zasadniczych częściach pracy. Na przykład, na samej górze strony 24 autor pisze "We do not claim this list is complete". O jaką listę chodzi: o tę Grusona i Peskina, czy listę krzywych rozważanych w tej rozprawie przez autora? Na środku strony 14 czytamy, że E jest stożkiem nad krzywą C o wierzchołku w punkcie $[0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1]$. W Twierdzeniu 3.1 to samo E oznacza stożek w $\mathbb{P}^4$ a w pierwszej linijce dowodu tego twierdzenia E okazuje się być dywizorem wyróżnionym! Fact 3.2 jest nieprecyzyjny, co oznacza "nearly all quintic threefolds"? Wszystkie poza skończoną liczbą, wszystkie ze zbioru otwartego w topologii Zariskiego, a może bardzo ogólną rozmaitość stopnia 5 w $\mathbb{P}^4$? W Fakcie 3.4 ”we see that X_3 has a triple point at $O = [0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1]$”. Nie możemy tego widzieć, bo w tej samej linijce X_3 jest zdefiniowane jako podrozmaitość w $\mathbb{P}^4$. Można by tę listę ciągnąć przez kolejne paragrafy. Nie będę tego robić zadawalając się stwierdzeniem, że prawdopodobnie przedstawione w pracy wyniki są poprawne, po uporządkowaniu oznaczeń i dopasowaniu argumentów. Krytykę zakończę retorycznym pytaniem o pustą przestrzeń na stronie 21 po Fakcie 3.6 (podrozdział 3.2 nie zaczynał się od nowej strony) oraz o dokończenie zdania w pierwszym paragrafie na stronie 22: ”We use as a main reference regarding the weighted projective spaces.”.

Przed pozytywną konkluzją recenzji, do której zmierzam, skupię się na rezultatach osiągniętych przez p. Grzelakowskiego. Postawiony przed nim cel dotyczył identyfikacji rozmaitości Calabi-Yau z pewnymi szczególnymi cechami, a mianowicie pojawiającymi się jako wygładzenie rozmaitości powstających przez ściągnięcia pewnych dywizorów do krzywych na rozmaitościach powstających z desyngularyzacji osobliwych rozmaitości Calabi-Yau trzech typów: hiperpowierzchni stopnia 5 w $\mathbb{P}^4$, zupełnych przecięć lub podrozmaitości w przestrzeni rzutowej z wagami. Naczelne założenie dotyczące geometrii wyjściowych, osobliwych, modeli jest takie, że zawierają one dwuwymiarowy stożek nad gładką krzywą, w wierzchołku tego stożka znajduje się punkt potrójny rozmaitości Calabi-Yau, a na powierzchni stożka dopuszczalne są proste punkty podwójne. Jak wynika chociażby z tego opisu postawiony problem jest bardzo specjalny i bardzo techniczny. Wydaje się, że p. Grzelakowski przyswoił sobie wymagane do jego rozwiązania zaawansowane narzędzia biwymiernej geometrii algebraicznej i posługuje się nimi, z dokładnością do niezbyt starannego zapisu, w sposób sprawny i umiejętny. W ramach opisanej procedury zostały zidentyfikowane istotnie nowe modele rozmaitości Calabi-Yau (z nowymi, nieznanymi wcześniej, liczbami Hodge’a), co jest niebagatelnym osiągnięciem zważywszy, że ”polowanie” na rozmaitości Calabi-Yau trwa ponad 30 lat, od ukazania się niezwykle wpływowej pracy Milesa Reida, cytowanej jako pozycja [33] w literaturze.

Podsumowując: Stwierdzam, że przedłożona rozprawa spełnia formalne i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim z matematyki i rekomenduję dopuszczenie mgr Grzelakowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tomasz Szemberg

Signed by /
Podpisano przez:

Tomasz Jacek
Szemberg

Date / Data:
2022-05-29 21:57