

Ocena rozprawy doktorskiej mgr inż. Joanny Piwnik p.t.: „Zagadnienia propagacji światła w polu grawitacyjnym”

Maria Przybylska
Instytut Fizyki, Uniwersytet Zielonogórski,
ul. prof. Z. Szafrana 4a, 65–516 Zielona Góra

9 kwietnia 2025

Przedłożona do recenzji rozprawa doktorska dotyczy badania wpływu pola grawitacyjnego na rozchodzenie się światła. Zagadnienie to odgrywa ważną rolę w astrofizyce i kosmologii. Problem został sformułowany przy pomocy zasady Fermata i dotyczy przypadku dowolnych pól grawitacyjnych.

Praca składa się z sześciu rozdziałów, sześciu załączników i bibliografii. W rozdziale pierwszym Autorka opisuje znaczenie analizy wpływu pola grawitacyjnego na rozchodzenie się fal elektromagnetycznych w zakrzywionej czasoprzestrzeni, stosowane narzędzia do tej analizy oraz charakteryzuje zawartość kolejnych rozdziałów pracy.

W rozdziale drugim przedstawiono różne sformułowania zasady Fermata, w tym w formie lagranżowskiej dla stałego pola grawitacyjnego, gdy składowe tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$ nie zależą od współrzędnej czasowej x^0 jak i dla dowolnego pola gdy funkcja Lagrange’a zależy od x^0 . W tym drugim przypadku x^0 odgrywa rolę działania i zasada Fermata może być sformułowana z wykorzystaniem formalizmu Herglotza. Pozwala to na przeprowadzenie redukcji zagadnienia rozchodzenia się światła do badania dynamiki układów zadanych przez jednorodne funkcje Lagrange’a z pominięciem jednej współrzędnej uogólnionej (podrozdział 2.2). Formalizm

Herglotza i uzyskane równania są następnie wykorzystywane do sformułowania zasady Fermata zarówno dla zerowych geodezyjnych dla fotonów (podrozdział 2.3) jak i geodezyjnych typu czasowego dla cząstek masywnych (podrozdział 2.4). Następnie opisano przejście do hamiltonowskiego sformułowania zasad wariacyjnych Herglotza dla obu typów cząstek (podrozdział 2.5). Ostatnie trzy podrozdziały zawierają przykłady zastosowań wyprowadzonych wzorów do metryki sferycznie symetrycznej (podrozdział 2.6), szczególnego przypadku metryki sferycznie symetrycznej: metryki Schwarzschilda-de Sittera (podrozdział 2.7) i metryki o symetrii osiowej (podrozdział 2.8). Dla tych przykładów podano również całki pierwsze.

Rozdział trzeci dotyczy opisu trajektorii promieni świetlnych na podstawie zasady Fermata dla przypadku, gdy parametr zderzenia jest duży np. w porównaniu z promieniem horyzontu dla metryki sferycznie symetrycznej. Przeanalizowano czasoprzestrzeń z metryką Schwarzschilda i metryką Reissnera-Nordströma opisującą naładowaną czarną dziurę oraz metrykę o symetrii osiowej. Obliczenia przeprowadzono wykorzystując rachunek zaburzeń w sformułowaniu Lindstedta-Poincarégo, w którym rolę małego parametru odgrywa $\beta = \frac{m}{b}$. W szczególności wyprowadzono w ten sposób wzory na odchylenie promienia świetlnego z dokładnością do wyrazów trzeciego stopnia w β .

W rozdziale czwartym Autorka analizowała trajektorie promieni świetlnych dla metryki Kerra opisującej stacjonarne pole grawitacyjne więc geodezyjne zerowe z zasady wariacyjnej Fermata opisywane są przy pomocy klasycznej funkcji Lagrange'a (bez zależności od x^0) i standardowego hamiltonianu. Ze względu na dwie zmienne cykliczne ϕ, t do całkowalności brakuje jednej całki pierwszej. Odpowiednik całki Cartera został znaleziony przy pomocy metody metamorfozy stałej sprzężenia. Rozwiązania są tutaj również wyznaczane metodą rozwinięcia Lindstedta-Poincarégo, została również zbadana granica Schwarzschilda.

Dwustronicowe rozdziały: piąty zawiera uwagi dotyczące zastosowania zasady Fermata do zamkniętych trajektorii światła, a rozdział szósty zawiera podsumowanie i komentarze do uzyskanych wyników.

Rozprawa napisana jest poprawnie pod względem językowym. Jest uzupełniona dodatkami zawierającymi opis zasady wariacyjnej Herglotza, opis

zasady Fermata dla dowolnych pól grawitacyjnych, streszczenie formalizmu Hamiltona dla geodezyjnych zerowych, opis metody perturbacyjnej Lindstedta-Poincare, całkowalność równań geodezyjnych w metryce Schwarzschilda-de Sittera, metodę metamorfozy stałej sprzężenia. Bibliografia liczy 62 pozycje i została trafnie dobrana do tematyki doktoratu.

Warto podkreślić, że część rezultatów opisanych w rozprawie została opublikowana w formie dwóch artykułów w renomowanych czasopismach Int. Journ. Mod. Phys. i Nucl. Phys. B, w przypadku drugiego artykułu pani mgr inż. Joanna Piwnik była pierwszym autorem. Kolejne dwa artykuły zostały upublicznione w elektronicznym archiwum preprintów naukowych arXiv.

Na uwagę zasługuje nowatorskie zastosowanie zasady wariacyjnej Herlotza do sformułowania zasady Fermata i analizy problemów rozchodzenia się światła w dowolnym polu grawitacyjnym.

Natomiast, to co w mojej opinii budzi niedosyt, to analiza rozwiązalnych równań przy pomocy metody szeregów Lindstedta-Poincarégo ograniczona do małych wartości parametru, wyrażającego się przy pomocy energii. Jeżeli dany problem sprowadza się do jednowymiarowego równania Newtona, to jego rozwiązanie wymaga policzenia jednej całki i jednej funkcji odwrotnej. Jakościowo ruch można opisać zawsze w oparciu o portret fazowy. Naturalne są pytania związane z takim globalnym opisem: czemu fizycznie odpowiadają niestabilne i stabilne położenia równowagi, orbity homo- i heterokliniczne, itp. Orbity takie ewidentnie istnieją, jak łatwo wywnioskować z rys. 3.1 i rys. 3.2.

Moim zdaniem mankamentem przedstawionej rozprawy jest brak wyjaśnienia, dlaczego zastosowano metodę przybliżoną Lindstedta-Poincarégo do równań, dla których można podać jawne rozwiązania analityczne. W przypadku równania (3.11) takie rozwiązanie ma postać:

$$u(\phi) = \frac{1}{6} + 2 \left[e_3 + (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2(\phi \sqrt{e_1 - e_3}, k) \right] \quad (1)$$

$\operatorname{sn}(z, k)$ jest funkcją eliptyczną Jacobiego,

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{2 - k^2}{\delta}, & e_2 &= \frac{2k^2 - 1}{\delta}, & e_3 &= -\frac{1 + k^2}{\delta}, \\ \delta &= 12\sqrt{1 - (1 - k^2)k^2} \end{aligned} \quad (2)$$

i moduł k wyznaczony jest przez parametr $h = m^2/2b^2 = \beta^2/2$ relacją

$$h = \frac{1}{108}(1 - 6e_3)(1 + 12e_3)^2 = \frac{1}{108} \left(1 + 6\frac{1+k^2}{\delta}\right) \left(1 - 12\frac{1+k^2}{\delta}\right)^2 \quad (3)$$

Również rozwiązanie równania (3.28) można jawnie przedstawić, za pomocą klasycznych funkcji Jacobiego.

Znając rozwiązanie analityczne możemy uzyskać jego przybliżenia bez konieczności odwoływania się do metod przybliżonego rozwiązywania równania różniczkowego drugiego rzędu.

Zastosowanie metody Lindstedta-Poincarégo do znalezienia przybliżonego jednowymiarowego autonomicznego równania Newtona ma oczywiście sens, gdy nie można analitycznie policzyć pojawiających się całek, gdy nie można w sposób analityczny policzyć funkcji odwrotnych do tychże całek lub uzyskane funkcje są bardzo skomplikowane.

Być może warto zauważyć, że również rozwiązanie równania (2.152) można efektywnie opisać analitycznie. W tym celu wprowadzamy zmienną niezależną η taką, że

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1 - 2u + \frac{k^2}{m^2}u^2}{1 - 2u \left(1 - \frac{k}{\varepsilon}\right)} \quad (4)$$

i wtedy równanie (2.152) można przepisać jako

$$\left(\frac{du}{d\eta}\right)^2 = 2 \left(1 - \frac{k}{\varepsilon}\right)^2 u^3 - \left(1 - \frac{k^2}{\varepsilon^2}\right) u^2 + \frac{m^2}{\varepsilon^2} \quad (5)$$

Analityczne rozwiązanie tego równania można wyrazić za pomocą funkcji Weierstrassa $\wp(z)$ lub za pomocą eliptycznych funkcji Jacobiego. Podobnie można postąpić z równaniem (3.45).

W pracy można znaleźć pewne usterki typowo edytorskie np. sformułowania „przepowiednie teoretyczne” na str. 4, czy „niezmiennicze na reparametryzację” na str. 6, nie są najzgrabniejsze; w linii nad równaniem (3.17) na str. 37 jest błędne odwołanie do rys. 2.1, a nad równaniem (3.33) niepoprawne odwołanie do równania (3.32). Sformułowanie „lokalna całka ruchu” wymaga komentarza, bo lokalnie poza punktami krytycznymi pole wektorowe można wyprostować i wówczas ma zawsze całki ruchu.

Pewne fragmenty są w mojej opinii opisane zbyt skrótowo. Na przykład na początku rozdziału 2: wyrażenie na zasadę Fermata opisaną wzorami

(2.3) i (2.4) trudno natychmiast odtworzyć bez sięgania do książki L.D. Landaua i E.M. Lifshitz, *Teoria pola*. Rozdział 5 jest bardzo krótki, opis bardzo zwarty i trudny do prześledzenia. W dodatku A poświęconym formalizmowi Herglotza warto byłoby wspomnieć, że jest wykorzystywany do układów kontaktowych, bo jest to jego najczęstsze zastosowanie.

Mimo przedstawionych powyżej zastrzeżeń i uwag dotyczących sposobu prezentacji tekstu uważam, że przedłożona rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane w postępowaniu o nadanie stopnia doktora i wnoszę o dopuszczenie pani mgr inż. Joanny Piwnik do dalszych etapów postępowania.

H. Piwnik