

Streszczenie

Rozprawa poświęcona jest analizie propagacji światła w zakrzywionych czasoprzestrzeniach ogólnej teorii względności, w przybliżeniu optyki geometrycznej. Jej główną ideą jest zastosowanie do tego klasycznego problemu, nierozzerwalnie związanego z głównymi wątkami ogólnej teorii względności, efektywnych metod teorii układów dynamicznych.

Punktem wyjścia jest wynikający z zasady równoważności fakt, że trajektorie promieni świetlnych w czasoprzestrzeni są zerowymi liniami geodezyjnymi. Równania opisujące linie geodezyjne mają postać równań Lagrange'a II rodzaju, wynikającą z prostego lagranżjanu kwadratowego w prędkościach, jeżeli zostanie odpowiednio dobrany parametr ewolucji (tzw. parametr afiniczny). Zerowe geodezyjne są dodatkowo scharakteryzowane przez znikanie całki „energii”. W płaskiej czasoprzestrzeni użytecznym narzędziem opisu propagacji promieni świetlnych jest zasada najkrótszego czasu Fermata. Już dawno podano jej uogólnienie na przypadek zakrzywionych czasoprzestrzeni opisujących stałe pole grawitacyjne, zarówno statyczne, jak i stacjonarne. Sformułowano również zasadę Fermata dla dowolnych pól grawitacyjnych; w tym przypadku ma ona mniej naturalną i funkcjonalną formę. Jednym z głównych wyników rozprawy jest podanie nowej wersji zasady Fermata dla dowolnych pól grawitacyjnych. Punktem wyjścia jest następujące proste twierdzenie udowodnione w rozprawie. Rozważamy funkcję Lagrange'a L , spełniającą warunki: (i) L jest niezdegenerowaną jednorodną funkcją prędkości uogólnionych drugiego rzędu; (ii) L nie zależy od parametru ewolucji. Wybierając dowolną wartość energii można rozwiązać równanie $E = L$ względem jednej z prędkości uogólnionych. Okazuje się, że otrzymane rozwiązanie definiuje nową funkcję Lagrange'a, opisującą zredukowane trajektorie w przestrzeni konfiguracyjnej, sparametryzowanej przez pozostałe współrzędne uogólnione. Ten prosty i elegancki wynik ma swoją cenę: $\mathcal{L}$ jest uogólnionym lagranżjanem, zależnym od zmiennej działania. Takie uogólnienie opisane jest tzw. formalizmem Herglotza, który jest równie dobrze rozwinięty, jak standardowy formalizm mechaniki analitycznej. Dzięki temu zaproponowana w rozprawie wersja zasady Fermata dostarcza efektywne narzędzia do analizy różnych problemów szczegółowych. Między innymi alternatywne sformułowanie zasady Fermata, znajdujące przejrzyste uzasadnienie na gruncie zasady wariacyjnej Herglotza.

Drugi główny wynik rozprawy oparty jest na obserwacji, że w przypadku geometrii opisujących czarne dziury, równania wynikające z zasady Fermata opisują drgania nieliniowe. W szczególności, w obszarze asymptotycznym są to małe drgania. Przybliżone rozwiązywanie równań opisujących małe drgania nieliniowe przyjmują postać rozwinięcia w szereg w amplitudzie takich drgań. Prawidłowe rozwinięcie opisane jest przez algorytm Lindstedta–Poincarégo. Zastosowanie tego algorytmu do zagadnienia propagacji promieni świetlnych w obszarze asymptotycznym prowadzi do opisu prawidłowo oddającego jakościowe i ilościowe charakterystyki trajektorii. W szczególności otrzymuje się elegancką metodę wyliczania kąta odchylenia promieni świetlnych w polu czarnej dziury.

Ostatni problem rozważany w rozprawie dotyczy propagacji promieni świetlnych w metryce Kerra. Z punktu widzenia dynamiki opisującej trajektorie geodezyjne w czterowymiarowej czasoprzestrzeni, jest to układ całkowalny w sensie Arnolda–Liouville'a. Całkami ruchu są: lagranżjan L pokrywający się z hamiltonianem), pędy uogólnione, sprzężone ze współrzędną czasową i kątem azymutalnym oraz tzw. stała Cartera, generująca transformacje symetrii, niebędące transformacjami punktowymi. W omawianej rozprawie zerowe geodezyjne analizowane są w ramach zasady Fermata. Odpowiednia funkcja Lagrange'a może być wybrana tak, by parametrem ewolucji był kąt azymutalny. W ten sposób otrzymuje się dwuwymiarowy układ dynamiczny z przestrzenią konfiguracyjną parametryzowaną przez zmienną radialną r i odległość zenitalną θ . Opisujący go hamiltonian jest

dość skomplikowany, lecz problem można uprościć przez zastosowanie tzw. metody metamorfozy stałej sprzężenia. Nieparametryzowane trajektorie wyjściowego hamiltonianu, odpowiadające różnym wartościom energii, można opisać jako trajektorie o zerowej energii rodziny hamiltonianów, których parametry są funkcjami wyjściowych energii. W ten sposób otrzymuje się dużo prostszy opis zerowych geodezyjnych w metryce Kerra w ramach dwuwymiarowego układu całkowalnego w sensie Arnolda–Liouville’a. Dodatkowa redefinicja parametru ewolucji pozwala całkowicie rozseparować zmienne, sprowadzając zagadnienie do dynamiki dwóch niezależnych newtonowskich oscylatorów nieliniowych.

Joanna Biernik